

LUCIAN BĂDESCU

**SUPRAFETE
ALGEBRICE**

EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

LUCIAN BĂDESCU

Suprafețe ALGEBRICE

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

BUCUREȘTI, 1981

PREFAȚĂ

Cartea de față are drept scop prezentarea unor fapte fundamentale din teoria suprafețelor algebrice, definite peste un corp k algebric închis de caracteristică arbitrară. Ea se bazează pe un șir de expuneri ținute de autor în cadrul unui seminar de geometrie algebrică organizat la Facultatea de matematică a Universității din București.

Se urmărește în principal clasificarea suprafețelor proiective și nesingulare (care mai sînt numite și simplu — suprafețe). În cazul varietăților algebrice complexe, această clasificare a fost făcută de către Enriques și Castelnuovo. În jurul anului 1960, Kodaira a reluat și simplificat clasificarea suprafețelor algebrice complexe și a extins-o și la cazul suprafețelor analitice compacte (cf. Kodaira [1] și [2]). Rămînea deschisă problema clasificării suprafețelor în caracteristică arbitrară. Primul progres în această direcție l-a constituit demonstrația pur algebrică (valabilă în orice caracteristică) dată de Zariski criteriului de raționalitate al lui Castelnuovo (cf. Zariski [2] și [3]). Apoi Mumford a introdus o serie de idei noi, astfel încît clasificarea suprafețelor a început să devină posibilă și în caracteristică arbitrară (cf. Mumford [3] și [4]). În fine, Bombieri și Mumford au desăvîrșit clasificarea suprafețelor în orice caracteristică (cf. Bombieri-Mumford [1] și [2]). Rezultatul obținut de ei a fost următorul: aceleași tipuri de suprafețe care apar în cazul cînd k este corpul complex, apar și în cazul general, dacă se lasă la o parte anumite patologii ce apar numai în caracteristică 2 și 3.

Este interesant de remarcat că noile idei și tehnici introduse de Bombieri și Mumford au simplificat și clarificat multe din argumentele clasice.

Scopul nostru principal este să prezentăm metodele introduse de Bombieri și Mumford privind clasificarea suprafețelor. Clasificarea propriu-zisă începe în § 7. A mai fost necesar să prezentăm și o serie de alte fapte de teoria suprafețelor (interesante

și în sine) care nu țin de clasificare, dar care intervin în aceasta. De exemplu: criteriul Nakai-Moishezon de amplitudine, teoria singularităților normale ale suprafețelor (cu referire specială la singularitățile raționale), raportul între dualitatea Grothendieck-Serre și studiul singularităților etc.

De asemenea, odată cu clasificarea suprafețelor se demonstrează și un rezultat remarcabil al lui Zariski și Mumford care afirmă că inelul canonic al unei suprafețe este o k -algebră finit generată. În §12 se clasifică complet modelele minimale ale suprafețelor riglate și raționale.

În partea finală a redactării materialului de față am luat cunoștință de o excelentă carte despre clasificarea suprafețelor complexe a lui A. Beauville (cf. Beauville [1]), în care sînt prezentate cîteva din ideile originale ale lui Enriques și Castelnuovo via lucrările lui Kodaira citate mai sus și seminarul Safarevici (cf. Safarevici și al. [1]).

Cartea se adresează cititorilor care posedă deja un bagaj de cunoștințe în geometria algebrică cum ar fi: teoria curbelor algebrice, coomologia fasciculelor coerente, teoria schemei Picard și Hilbert pentru suprafețe, fapte generale despre varietăți abeliene, elemente de topologie algebrică și topologie etală (numere Betti, clase Chern etc.) și teorema Riemann-Roch pentru suprafețe (incluzînd formula lui Noether). Pornind de la aceste fapte, am căutat să prezint materialul într-o manieră unitară și cu demonstrații complete.

În încheiere țin să mulțumesc lui N. Manolache pentru citirea atentă a manuscrisului și observațiile făcute.

AUTORUL

CUPRINS

<i>Convenții de notații</i>	9
§ 1. Teoria coomologică a intersecției și criteriul Nakai-Moishezon de amplitudine	11
§ 2. Teorema lui Hodge de index. Structura matricii de intersecție a unei fibre	26
§ 3. Criterii de contractibilitate și singularități raționale	30
§ 4. Proprietăți ale singularităților raționale	59
§ 5. Formula lui Noether, Schema Picard, Varietatea Albanese, Plurigenuri . .	73
§ 6. Existența modelelor minimale	83
§ 7. Morfisme de la o suprafață la o curbă. Fibrări eliptice și evasieliptice . . .	89
§ 8. Dimensiunea canonică a unei fibrări eliptice sau evasieliptice	113
§ 9. Teorema de clasificare după dimensiunea canonică	123
§ 10. Suprafețe cu dimensiunea canonică zero (car $\neq 2,3$)	136
§ 11. Suprafețe riglate. Criteriul Noether-Tsen	164
§ 12. Modele minimale de suprafețe riglate	178
§ 13. Caracterizarea suprafețelor riglate și raționale	189
<i>Bibliografie</i>	210
<i>Index</i>	213
<i>Abstract</i>	215
<i>Contents</i>	217

CONVENȚII DE NOTAȚII

În cele ce urmează vom fixa un corp k algebric închis de caracteristică arbitrară. Vom folosi notațiile standard din EGA (Grothendieck-Dieudonné [1]). Prin varietate algebrică peste k vom înțelege o k -schemă algebrică integră.

Dacă X este o varietate algebrică completă și L un O_X -modul inversibil, vom nota prin $|L|$ mulțimea tuturor divizorilor Cartier efectivi D de pe X astfel încât $O_X(D) \cong L$. Această mulțime (numită sistemul linear asociat lui L) se identifică în mod natural cu spațiul proiectiv $P(H^0(L))$ asociat spațiului secțiunilor globale $H^0(L)$ ale lui L (cf. Mumford [1], lecția 10).

Presupunem acum X varietate completă și nesingulară. Atunci divizorii Cartier de pe X se identifică cu divizorii Weil de pe X . Vom nota prin $\text{Div}(X)$ mulțimea tuturor divizorilor lui X . Dacă D_1 și $D_2 \in \text{Div}(X)$, atunci prin notația $D_1 \sim D_2$ înțelegem că divizorul D_1 este linear echivalent cu divizorul D_2 . Fie acum L_1 și L_2 două O_X -module inversibile. Atunci prin notația $L_1 \approx L_2$ (resp. $L_1 \cong L_2$) înțelegem că L_1 este algebric (resp. numeric) echivalent cu L_2 (cf. §5 pentru definițiile acestor noțiuni). Vom nota prin $\text{Pic}(X)$ grupul lui Picard al lui X a tuturor claselor de izomorfism de O_X -module inversibile (cu operația indusă de produsul tensorial), și prin $\text{Pic}^0(X)$ (resp. $\text{Pic}'(X)$) subgrupul lui $\text{Pic}(X)$ format din toate clasele de izomorfism $L \in \text{Pic}(X)$ astfel încât $L \approx O_X$ (resp. $L \cong O_X$). Vom pune atunci $NS(X) = \text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$ (grupul lui Néron-Severi al lui X) și $\text{Num}(X) = \text{Pic}(X)/\text{Pic}'(X)$.

Restul de notații și terminologie care nu sînt standard vor mai fi precizate și pe parcursul lucrării.

§ 1.

TEORIA COOMOLOGICĂ A INTERSECȚIEI ȘI CRITERIUL NAKAI-MOISHEZON DE AMPLITUDINE

În acest paragraf vom prezenta, după Kleiman [1], teoria coomologică a intersecției divizorilor precum și criteriul Nakai-Moishezon de amplitudine a unui divizor împreună cu consecințele sale mai importante. De asemenea vom demonstra că orice suprafață completă și nesingulară este proiectivă.

(1.1) TEOREMĂ. (Snapper). Fie F un O_V -modul coerent pe K -schema algebrică completă V (cu K un corp algebric închis de caracteristică arbitrară, fixat odată pentru totdeauna), și fie L_1, \dots, L_t ($t \geq 0$) O_V -module inversibile. Atunci funcția $f_F(n_1, \dots, n_t) = \chi(F \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$ este un polinom numeric în $n_1 \dots n_t$ de grad $\leq s = \dim(\text{Supp}(F))$.

(1.2) Fie $\mathbb{Q}[n_1, \dots, n_t]$ inelul polinoamelor cu coeficienți raționali în variabilele n_1, \dots, n_t . Este clar că polinoamele de forma $\binom{n_1 + i_1}{i_1}, \dots, \binom{n_t + i_t}{i_t}$, $i_k \geq 0$, formează o bază peste \mathbb{Q} a lui $\mathbb{Q}[n_1, \dots, n_t]$. Dacă $f \in \mathbb{Q}[n_1, \dots, n_t]$, f se numește *polinom numeric* dacă pentru orice $(n_1, \dots, n_t) \in \mathbb{Z}^t$, valoarea lui f în (n_1, \dots, n_t) este totdeauna un număr întreg. Dacă exprimăm pe f sub forma

$$f = \sum_{i_k \geq 0} a_{i_1, \dots, i_t} \binom{n_1 + i_1}{i_1} \dots \binom{n_t + i_t}{i_t}, \quad a_{i_1, \dots, i_t} \in \mathbb{Q},$$

atunci avem următorul criteriu simplu: f este polinom numeric dacă și numai dacă $a_{i_1, \dots, i_t} \in \mathbb{Z}$ pentru orice $i_k \geq 0$.

Demonstrația teoremei (1.1). Vom proceda prin inducție după s , cazurile $s = -1$ (i.e. $F = 0$) și $s = 0$ fiind banale. Presupunem deci $s \geq 1$. Înlocuind pe V cu $\text{Supp}(F)$ (cu structura de subschemă închisă dată de idealul anulator $\text{Ann}(F) \subset \mathcal{O}_V$), putem presupune $V = \text{Supp}(F)$. Fie atunci \mathcal{L} categoria tuturor \mathcal{O}_V -modulelor coerente și fie \mathcal{L}' subclasa lui \mathcal{L} formată din acele fascicule ce satisfac concluzia teoremei. Folosind ipoteza de inducție și aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré, se observă imediat că dacă $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_2 \rightarrow F_3 \rightarrow 0$ este un sir exact în \mathcal{L} astfel încât două din aceste fascicule sînt în \mathcal{L}' , atunci al treilea este de asemenea în \mathcal{L}' . Ca să dovedim egalitatea $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ folosim lema de dévissage (EGA III 3.1.2). În baza acestei leme este suficient să arătăm că dacă $X \subset V$ este o subschemă închisă și integră a lui V , atunci $\mathcal{O}_X \in \mathcal{L}'$.

Această afirmație se demonstrează prin inducție după t , cazul $t = 0$ fiind banal. Deoarece X este o \bar{K} -schemă algebrică integră există un divizor Cartier D pe X astfel încît $L_1 \cong \mathcal{O}_X(D)$. Fie

$$J = \mathcal{O}_X(-D) \cap \mathcal{O}_X, \quad I = J \cdot \mathcal{O}_X(D) = J \otimes L_1 \subset \mathcal{O}_X,$$

$$G = \mathcal{O}_X/J \text{ și } H = (\mathcal{O}_X/I) \otimes L_1^{-1}.$$

Atunci avem sirurile exacte:

$$0 \rightarrow J \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow G \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ 0 \rightarrow I \otimes L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow \\ \rightarrow H \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow 0 \end{array}$$

de unde obținem egalitatea:

$$\begin{aligned} \chi(L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}) - \chi(L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}) = \\ = \chi(H \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}) - \chi(G \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}). \end{aligned}$$

Însă $\text{Supp}(G)$ și $\text{Supp}(H)$ sînt strict incluse în X , deci după ipoteza de inducție (după s), G și H aparțin lui \mathcal{L}' , de unde deducem că membrul doi al egalității de mai sus este un polinom numeric de grad $< s$. Deoarece după ipoteza inductivă (după t) funcția $\chi(L_2^{n_2} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$ este un polinom numeric de grad $\leq s$, afirmația de mai sus (și prin aceasta teorema (1.1)) rezultă. Q.E.D.

(1.3) *Observații.* a) Dacă V este o curbă algebrică completă și nesingulară și L este un fascicul inversibil pe V , atunci faptul că $\chi(L^n)$ este polinom numeric rezultă și din teorema Riemann-Roch, anume $\chi(L^n) = n \deg(L) + \chi(O_V)$.

b) Dacă V este o suprafață proiectivă și nesingulară și L_1, L_2 sînt două O_V -module inversibile, atunci din teorema Riemann-Roch pentru suprafețe deducem următoarea formă explicită a polinomului numeric $\chi(L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2})$:

$$\chi(L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2}) = 1/2 [n_1^2 \cdot (L_1^2) + 2 n_1 n_2 \cdot (L_1 \cdot L_2) + n_2^2 \cdot (L_2^2)] - \\ - 1/2 \cdot [n_1(L_1 \cdot \omega_V) + n_2(L_2 \cdot \omega_V)] + \chi(O_V),$$

unde (\cdot) este indicele clasic de intersecție (cf. Mumford [1]), iar ω_V este fasciculul canonic pe V . În particular, indicele clasic de intersecție $(L_1 \cdot L_2)$ apare drept coeficientul lui $n_1 n_2$ în polinomul numeric $\chi(L_1^{n_1} \otimes L_2^{n_2})$ de grad 2.

Aceste observații sugerează următoarea definiție generală a indicelui de intersecție:

(1.4) DEFINIȚIE. Fie L_1, \dots, L_t ($t \geq 0$) t fascicule inversibile pe K -schema algebrică completă V , și fie F un O_V -modul coerent astfel încît $\dim \text{Supp}(F) \leq t$. Se numește *indicele de intersecție* $(L_1 \dots L_t \cdot F) = (L_1 \dots L_t \cdot F)_V$ al lui L_1, \dots, L_t cu F , coeficientul monomului $n_1 n_2 \dots n_t$ din polinomul numeric (de grad $\leq t$) $\chi(F \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$.

Din definiție și din (1.2) rezultă că $(L_1 \dots L_t \cdot F)$ este totdeauna un număr întreg. În plus avem în mod evident:

(1.5) LEMĂ. $(L_1 \dots L_t \cdot F) = 0$ dacă $\dim \text{Supp}(F) < t$ și $(F) = \dim H^0(F)$ dacă $\dim \text{Supp}(F) = t = 0$.

(1.6) LEMĂ. $(L_1 \dots L_t \cdot F)$ este o formă simetrică în L_1, \dots, L_t .

Demonstrație. Numai linearitatea nu este evidentă. Fie M și N două O_V -module inversibile. Avem de determinat $(M \otimes N^{-1} \cdot L_2 \dots L_t \cdot F)$. Observăm că

$$\chi(F \otimes M^m \otimes N^{-n} \otimes L_2^{n_2} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}) = (M \cdot L_2 \dots L_t \cdot F) \cdot m n_2 \dots n_t - \\ - (N \cdot L_2 \dots L_t \cdot F) \cdot n n_2 \dots n_t + \dots,$$

luînd succesiv $m = 0$ și $n = 0$. Însă dacă $m = n = n_1$, avem

$$\chi(F \otimes (M \otimes N^{-1})^{n_1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}) = [(M \cdot L_2 \dots L_t \cdot F) - \\ - (N \cdot L_2 \dots L_t \cdot F)] \cdot n_1 n_2 \dots n_t + \dots,$$

de unde rezultă linearitatea. Q.E.D.

(1.7) *Notăție.* Dacă $L_1 = L_2 = \dots = L_t = L$, vom mai scrie $(L \cdot^t \cdot F)$ în loc de $(L \dots L \cdot F)$. Dacă $F = O_W$ cu W subschemă închisă în V , vom mai scrie $(L_1 \dots L_t \cdot W)$ în loc de $(L_1 \dots L_t \cdot O_W)$, iar dacă $W = V$, vom mai scrie $(L_1 \dots L_t)$ în loc de $(L_1 \dots L_t \cdot V)$. În particular, dacă $L_1 = \dots = L_r = L$ și $L_{r+1} = \dots = L_t = L'$ și $F = O_W$, vom scrie simplu $(L^r \cdot L'^{(t-r)} \cdot W)$ în loc de $(\underbrace{L \dots L}_{r \text{ ori}} L' \dots L' \cdot W)$.

(1.8) LEMĂ. Dacă $0 \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow F'' \rightarrow 0$ este un șir exact de O_V -module coerente astfel încât $\dim \text{Supp}(F) \leq r$, atunci

$$(L_1 \dots L_t \cdot F) = (L_1 \dots L_t \cdot F') + (L_1 \dots L_t \cdot F'').$$

Demonstrația rezultă imediat folosind definiția indicelui de intersecție și aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré.

(1.9) LEMĂ. Dacă $D \in |L_1|$ și $D \cap \text{Ass}(F) = \emptyset$, atunci punând $F_D = F \otimes O_D$, avem $(L_1 \dots L_t \cdot F) = (L_2 \dots L_t \cdot F_D)$. În particular, dacă $\dim(V) \leq t$, atunci $(L_1 \dots L_t) = (L_2 \dots L_t \cdot D)$.

Demonstrație. Deoarece $D \cap \text{Ass}(F) = \emptyset$, avem șirul exact $0 \rightarrow F \otimes L_1^{-1} \rightarrow F \rightarrow F_D \rightarrow 0$ (dacă $D = \text{div}_V(s)$ cu $s \in H^0(L_1)$, atunci condiția $D \cap \text{Ass}(F) = \emptyset$ înseamnă că s nu este divizor al lui zero în fibra F_x a lui F într-un punct arbitrar $x \in V$). Tensorizând cu $L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}$ obținem șirul exact

$$0 \rightarrow F \otimes L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow F \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow F_D \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} \rightarrow 0$$

din care deducem egalitatea

$$\begin{aligned} \chi(F_D \otimes L_1 \otimes \dots \otimes L_t) &= \chi(F \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}) - \chi(F \otimes L_1^{n_1-1} \otimes L_2^{n_2} \otimes \dots \\ &\dots \otimes L_t^{n_t}) = (L_1 \dots L_t \cdot F) \cdot n_1 \dots n_t + \dots - (L_1 \dots L_t \cdot F) \cdot (n_1 - \\ &- 1) n_2 \dots n_t - \dots = (L_1 \dots L_t \cdot F) n_2 \dots n_t + \dots \end{aligned}$$

Însă luând $n_1 = 0$ în polinomul $\chi(F_D \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$ obținem de asemenea

$$\chi(F_D \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}) = (L_2 \dots L_t \cdot F_D) \cdot n_2 \dots n_t + \dots, \quad \text{Q.E.D.}$$

Presupunem acum că $X = \text{Supp}(F)$ este conținut în subschema închisă W a lui V , astfel încât subschema închisă X definită de idealul $\text{Ann}(F)$ este de asemenea subschemă închisă în W . Atunci F poate fi considerat ca O_W -modul coerent și avem

$$F \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} = (F \otimes O_W) \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t} = F \otimes L_{1,W}^{n_1} \otimes \dots \otimes L_{t,W}^{n_t}.$$

unde prin $L_{i,W}$ am notat fasciculul $L_i \otimes O_W$. Obținem deci :

(1.10) LEMĂ. În situația de mai sus avem egalitatea

$$(L_1 \dots L_t \cdot F)_V = (L_{1,W} \dots L_{t,W} \cdot F)_W.$$

În particular,

$$(L_1 \dots L_t \cdot W)_V = (L_{1,W} \dots L_{t,W})_W.$$

Fie acum V_1, \dots, V_n componentele ireductibile ale lui V . Notăm $V_i^0 = V_i - \bigcup_{j \neq i} V_j = V - \bigcup_{j \neq i} V_j$, $i = 1, \dots, n$. Cum V_i^0 este deschis în V și (deschis) dens în V_i , rezultă, ținând cont de EGA I, 9.5.10, că pe V_i avem o structură bine determinată de schemă. Obținem :

(1.11) COROLAR. Presupunem $V = \text{Supp}(F)$ și fie V_1, \dots, V_n componentele ireductibile ale lui V înzestrate cu structurile de subschemă descrise mai sus. Dacă notăm $F_i = F \otimes O_{V_i}$, atunci are loc :

$$(L_1 \dots L_t \cdot F) = (L_1 \dots L_t \cdot F_1) + \dots + (L_1 \dots L_t \cdot F_n).$$

Demonstrație. În șirul exact $0 \rightarrow K \rightarrow F \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{i=1}^n F_i \rightarrow C \rightarrow 0$ avem $\text{Supp}(K), \text{Supp}(C) \subseteq \bigcup_{i \neq j} V_i \cap V_j$, deci $\dim \text{Supp}(K), \dim \text{Supp}(C) < t$. Ținând cont de (1.5) și (1.8) avem succesiv :

$$\begin{aligned} (L_1 \dots L_t \cdot F) &= (L_1 \dots L_t \cdot K) + (L_1 \dots L_t \cdot \text{Im}(\alpha)) = \\ &= (L_1 \dots L_t \cdot \bigoplus_{i=1}^n F_i) - (L_1 \dots L_t \cdot C) = \sum_{i=1}^n (L_1 \dots L_t \cdot F_i). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

(1.12) COROLAR. Presupunem V ireductibilă și $\dim(V) \leq t$. Fie $x \in V$ punctul generic al lui V și $d = \text{lung}_{O_x}(F_x)$ lungimea O_x -modulului F_x . Atunci

$$(L_1 \dots L_t \cdot F) = d (L_1 \dots L_t \cdot V_{\text{red}}).$$

Demonstrație. Cum O_x este un inel artinian și F un O_x -modul coerent, fibra F_x este întotdeauna un O_x -modul de lungime finită. Dacă $\dim \text{Supp}(F) < t$, corolarul este evident. De asemenea, corolarul este evident când $F = O_{V_{\text{red}}}$. Fie \mathcal{L}' clasa tuturor O_V -modulelor coerente pentru care corolarul (1.12) este adevărat. Deoarece $(L_1 \dots L_t \cdot F)$ și $\text{lung}_{O_x}(F_x)$ sînt ambele funcții aditive de F , \mathcal{L}' este subclasă exactă a categoriei \mathcal{L} a tuturor O_V -modulelor coerente și corolarul rezultă atunci din lema de dévissage (EGA III 3.1.2).

(1.13) COROLAR. Fie W o subschemă închisă a lui V de dimensiune t și fie $D \in |L_{1,W}|$. Atunci

$$(L_1 \dots L_t \cdot W) = (L_2 \dots L_t \cdot D).$$

Demonstrație. Avem succesiv :

$$(L_1 \dots L_t \cdot W) = (L_{1,W} \dots L_{t,W}) = \dots \quad (\text{după (1.10)})$$

$$= (L_{2,W} \dots L_{t,W} \cdot D) = \dots \quad (\text{după (1.9)})$$

$$= (L_2 \dots L_t \cdot D) \quad (\text{după (1.10)}). \quad \text{Q.E.D.}$$

(1.14) Fie $f: V' \rightarrow V$ un morfism de k -scheme algebrice complete și ireductibile V' și V de puncte generice x' și x respectiv. Avem : a) $f(x') = x \Leftrightarrow \dim f(V') = \dim(V)$; b) Dacă $f(x') = x$, atunci fiecare O_x -modul de lungime finită M este un O_x -modul de lungime finită $\Leftrightarrow \dim(V') = \dim(V)$, și în acest caz are loc formula

$$\text{lung}_{O_x}(M) = [k(x') : k(x)] \text{lung}_{O_x}(M).$$

(1.15) DEFINIȚIE. Fie $f: V' \rightarrow V$ un morfism între două k -scheme algebrice complete și ireductibile V' și V de puncte generice x' și x respectiv. Gradul lui f este prin definiție următorul număr rațional :

$$\deg(f) = \begin{cases} \text{lung}_{O_x}(O_{x'}) / \text{lung}_{O_x}(O_x) & \text{dacă } \dim(V') = \dim(V) = \dim f(V'). \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$$

(1.16) *Exemple.* a) Fie $f: V_{\text{red}} \hookrightarrow V$ morfismul canonic de incluziune, și $n = \text{lung}_{O_x}(O_x)$. Atunci $\deg(f) = 1/n$.

b) Fie $f: V' \rightarrow V$ un morfism birațional, adică un morfism f cu proprietățile: $f(x') = x$ și omomorfismul local $O_x \rightarrow O_{x'}$ corespunzător izomorfism. Atunci $\deg(f) = 1$.

c) Fie $f: V' \rightarrow V$ un morfism cu $\deg(f) > 0$. Dacă V' și V sînt integrale, atunci $\deg(f) = [k(x') : k(x)]$.

(1.17) LEMĂ. Fie $f: V' \rightarrow V$, $g: V'' \rightarrow V'$ și $h = f \circ g$, unde V'' , V' și V sînt k -scheme algebrice complete și ireductibile. Atunci $\deg(h) = \deg(f) \cdot \deg(g)$, afară de cazul cînd $\dim(V') > \dim(V'') = \dim(V) = \dim(h(V''))$.

Demonstrație. Presupunem $\deg(h) > 0$. Atunci $\dim(V'') = \dim(V) = \dim h(V'') \leq \dim g(V'')$, $\dim f(V') \leq \dim(V')$. Deci $\deg(f), \deg(g) > 0$ afară de cazul cînd $\dim(V') > \dim(V'') = \dim(V) = \dim h(V'')$. Presupunînd deci $\deg(f) > 0$, $\deg(g) > 0$, atunci $\deg(h) > 0$ și $\text{lung}_{O_x}(O_{x''}) = [k(x') : k(x)] \cdot \text{lung}_{O_{x'}}(O_{x''}) = [k(x') : k(x)] \cdot \text{lung}_{O_{x'}}(O_{x'}) \cdot \deg(g) = \text{lung}_{O_x}(O_{x'}) \cdot \deg(g)$ (unde x'' , x' , x reprezintă punctele generice ale lui X'' , X' , X respectiv). Q.E.D.

(1.18) LEMĂ. Fie $f: V' \rightarrow V$ un morfism de scheme algebrice complete și ireductibile peste k și presupunem $t \geq \dim(V')$, $\dim(V)$. Fie L_1, \dots, L_t O_V -module inversibile și $L'_i = f^*(L_i)$, $i = 1, \dots, t$. Atunci are loc formula:

$$(L'_1 \dots L'_t)_{V'} = (\deg(f)) \cdot (L_1 \dots L_t)_V.$$

Demonstrație. Punînd $L = L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t}$ și $L' = L_1'^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t'^{n_t}$, avem $L' = f^*(L)$ și $R^q f_*(L') = R^q f_*(O_{V'} \otimes L') = R^q f_*(O_{V'}) \otimes L$ (formula proiecției). Considerînd șirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(V, R^q f_*(L')) = H^p(V, R^q f_*(O_{V'}) \otimes L) \Rightarrow H^{p+q}(V', L')$$

și ținînd cont că termenul E_{n+1} se obține luînd omologia lui E_n , obținem

$$(*) \quad \chi(L') = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \chi(R^q f_*(O_{V'}) \otimes L).$$

Pasul 1: $\deg(f) = 0$. Deci $\dim f(V') < t$. Atunci $\dim \text{Supp}(R^q f_* O_{V'}) < t$ pentru orice q , deci $\chi(R^q f_*(O_{V'}) \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$ este un polinom numeric de grad $< t$, deci $\chi(L_1'^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t'^{n_t})$ are aceeași proprietate. Rezultă deci $(L'_1 \dots L'_t)_{V'} = 0$.

Pasul 2: f morfism birațional. Atunci f induce un izomorfism biregulat de la un deschis din V' pe un deschis din V , deci pentru

orice $q > 0$, $\dim \text{Supp } R^q f_*(O_{V'}) < t$. Rezultă că partea omogenă de grad t a polinomului $\chi(L_1'^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t'^{n_t})$ coincide cu partea omogenă de grad t a polinomului $\chi(f_*(O_{V'}) \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$. Pe de altă parte avem șirul exact

$$0 \rightarrow K \rightarrow O_V \xrightarrow{\alpha} f_*(O_{V'}) \rightarrow C \rightarrow 0$$

cu $\dim \text{Supp}(K)$, $\dim \text{Supp}(C) < t$. Aplicînd (1.5) și (1.8) deducem imediat că partea omogenă de grad t din polinomul $\chi(L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$ coincide cu partea omogenă de grad t din polinomul $\chi(f_*(O_{V'}) \otimes L_1^{n_1} \otimes \dots \otimes L_t^{n_t})$. Deducem deci egalitatea

$$(L_1' \dots L_t')_{V'} = (L_1 \dots L_t)_V.$$

Pasul 3. f finit, $\deg(f) > 0$ și V' și V reduse. Atunci f este morfism afin și deci $R^q f_*(O_{V'}) = 0$ pentru orice $q > 0$. Deci $(L_1' \dots L_t')_{V'} = (L_1 \dots L_t \cdot f_*(O_{V'}))_V$.

Aplicînd (1.12) ultimului termen, avem $d = \text{lung}_{O_x} f_*(O_{V'})_x = [k(x') : k(x)] = \deg(f)$, de unde concluzia și în acest caz.

Pasul 4: $V' = V_{\text{red}}$ și $f: V_{\text{red}} \hookrightarrow V$ incluziunea canonică. Atunci concluzia decurge din (1.12).

Pasul 5: Cazul general și $\deg(f) > 0$. Considerăm atunci descompunerea următoare a morfismului f :

$$\begin{array}{ccccc} Y & \xrightarrow{\text{bir}} & V'_{\text{red}} & \hookrightarrow & V' \\ \text{bir} \downarrow & & & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\text{finit}} & V_{\text{red}} & \hookrightarrow & V \end{array}$$

în care X este normalizata lui V_{red} în corpul funcțiilor raționale al lui V'_{red} , iar Y este „join”-ul lui X cu V'_{red} . Pasul 5 rezultă din descompunerea considerată și pașii 2–4. Q.E.D.

(1.19) LEMĂ. Simbolul $(L_1 \dots L_t \cdot F)_V$ este unic determinat de proprietățile din lemele (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.10) și (1.18).

Demonstrație. Fie $\langle L_1 \dots L_t \cdot F \rangle_V$ un alt simbol satisfăcînd lemele (1.5), (1.6), (1.8), (1.9), (1.10) și (1.18). Atunci acest simbol satisface și corolariile (1.11), (1.12) și (1.13), care se deduc în mod formal din lemele de mai sus. Vom arăta că

$$\langle L_1 \dots L_t \cdot F \rangle_V = (L_1 \dots L_t \cdot F)_V.$$

După (1.10) putem presupune că $V = \text{Supp}(F)$, după (1.11) că V este ireductibilă, după (1.12) că V este integră și $F = O_V$, după lema lui Chow și (1.18) că V este proiectivă. Vom arăta atunci prin inducție după t că $\langle L_1 \dots L_t \cdot W \rangle_V = (L_1 \dots L_t \cdot W)_V$, cu W subschemă închisă a lui V arbitrară de dimensiune t . Când $t = 0$ totul este clar din (1.5). Presupunem deci $t > 0$. Atunci L_1 poate fi scris sub forma $L_1 = O_V(H - H')$ cu H și H' divizori Cartier foarte amplii pe V . Fie $M = O_V(H)$ și $N = O_V(H')$. Atunci

$$(L_1 \dots L_t \cdot W)_V = (M \cdot L_2 \dots L_t \cdot W)_V - (N \cdot L_2 \dots L_t \cdot W)_V \text{ după (1.6)}$$

$$= (L_2 \dots L_t \cdot W \cap H)_V - (L_2 \dots L_t \cdot W \cap H')_V \text{ după (1.9)}$$

$$= \langle L_2 \dots L_t \cdot W \cap H \rangle_V - \langle L_2 \dots L_t \cdot W \cap H' \rangle_V \text{ ipoteza de inducție}$$

$$= \langle L_1 \dots L_t \cdot W \rangle_V \text{ după (1.9) și (1.6). Q.E.D.}$$

(1.20) COROLAR. Dacă V este o suprafață proiectivă și nesingulară, atunci $(L_1 \cdot L_2)$ coincide cu indicele clasic de intersecție.

(1.21) LEMĂ. Dacă V este o schemă algebrică completă peste k și W o subschemă închisă a lui V de dimensiune t , atunci pentru orice O_V -modul inversibil L numărul $(L^t \cdot W)$ coincide cu $t!a$, unde a este coeficientul lui n^t din $\chi(L^n \otimes O_W)$.

Demonstrație. Înlocuind pe V cu W , pe L cu $L \otimes O_W$, putem presupune că $W = V$ datorită lui (1.10). Fie $n = n_1 + \dots + n_t$. Atunci $\chi(L^{n_1} \otimes \dots \otimes L^{n_t}) = \chi(L^n)$, deci $an^t + a_{n-1}t^{n-1} + \dots = a(n_1 + \dots + n_t)^t + \dots$. Deoarece coeficientul lui $n_1 \dots n_t$ din dezvoltarea $(n_1 + \dots + n_t)^t$ este $t!a$, atunci (1.21) rezultă direct din definiția indicelui de intersecție. Q.E.D.

Sîntem acum în măsură să demonstrăm următorul criteriu important de amplitudine.

(1.22) TEOREMĂ. (Criteriul Nakai-Moishezon). Fie V o schemă algebrică completă peste k și fie L un O_V -modul inversibil. Atunci L este amplu dacă și numai dacă pentru orice subschemă W închisă, integră și de dimensiune $t > 0$ avem $(L^t \cdot W) > 0$.

Demonstrație. Mai întii cîteva observații :

a) Fie V_1, \dots, V_n componentele ireductibile ale lui V , cu structurile de subscheme închise descrise înainte de (1.11). Atunci după Hartshorne [3], pag. 24, L este amplu dacă și numai dacă $L \otimes O_{V_i}$ este amplu pentru orice $i = 1, \dots, n$.

b) Fie V ireductibilă. Atunci L este amplu dacă și numai dacă $L \otimes \mathcal{O}_{V_{\text{red}}}$ este amplu (cf. EGA II, 4.5.14).

c) L îndeplinește condiția numerică din enunțul teoremei (1.22) dacă și numai dacă pentru orice componentă integră $V_{i,\text{red}}$ a lui V $L \otimes \mathcal{O}_{V_{i,\text{red}}}$ îndeplinește aceeași condiție pentru $V_{i,\text{red}}$.

Din aceste trei observații deducem că, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că V este în plus integră.

Presupunem acum că L este amplu. Există atunci un $n > 0$ astfel încât L^n este foarte amplu. Atunci, deoarece V este integră, L^n este de forma $\mathcal{O}_V(D)$ cu D divizor Cartier efectiv și foarte amplu. Altfel spus, există o scufundare $V \hookrightarrow P^m$ și un hiperplan H în P^m astfel încât $D = H \cap V$ (în sensul imaginii inverse de divizori). Fie atunci W o subschemă închisă și integră a lui V de dimensiune

$$t > 0. \text{ Avem } (L^t \cdot W) = 1/n^t \cdot (\mathcal{O}_V(D)^t \cdot W)_V = 1/n^t \cdot \underbrace{(D \dots D \cdot W)_V}_{t \text{ ori}} = \\ = 1/n^t \cdot \underbrace{(H \dots H \cdot W)_{P^m}}_{t \text{ ori}} = 1/n^t \cdot \deg(W) > 0.$$

Reciproc, presupunem că pentru orice subschemă închisă și integră W a lui V de dimensiune $t > 0$, avem $(L^t \cdot W) > 0$. Avem de demonstrat că L este amplu. Vom proceda prin inducție după $d = \dim(V)$. Dacă $d = 0$ teorema este trivială. Dacă V este o curbă (integră), știm că $\deg(L) = (L)_V > 0$. Fie $f: V' \rightarrow V$ morfismul birățional de normalizare. Atunci V' este o curbă proiectivă și neregulară, iar după (1.18) $\deg f^*(L) = \deg(L) > 0$. Din teorema Riemann-Roch pentru curba V' rezultă că $(f^*(L))^n$ este foarte amplu dacă $n > 2p_a(V') + 1$, de unde rezultă că $f^*(L)$ este amplu. Cum însă f este un morfism finit, rezultă că L este de asemenea amplu (această afirmație rezultă de exemplu folosind criteriul coomologic de amplitudine din EGA. III, 2.3.1, cu ajutorul căruia se poate demonstra și observația a) de mai sus).

Presupunem acum $d \geq 2$, V integră și L/W amplu pentru orice subschemă închisă $W \subsetneq V$ (prin ipoteza de inducție, deoarece $\dim(W) < \dim(V)$).

Pasul 1. $\chi(L^n) \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \infty$.

Într-adevăr, $(L^d) = d!a > 0$ (cf. 1.21)), unde $\chi(L^n) = a \cdot n^d + \dots$. Rezultă $a > 0$ și afirmația este clară.

Pasul 2. Putem presupune că $L = \mathcal{O}_V(D)$ cu D divizor efectiv.

Pentru aceasta va fi suficient (înlocuind pe L cu L^n) să dovedim că $H^0(L^n) \neq 0$ pentru $n \gg 0$. Deoarece V este integră, putem privi pe L ca un subfascicul al fascicului constant $k(V)$ al tuturor

funcțiilor raționale pe V , și atunci punem $I = L^{-1} \cap O_V$ și $J = I \cdot L = I \otimes L = O_V$. Fie X și Y subschemele închise ale lui V definite de idealele I și J respectiv. Deoarece I și J nu pot fi ideale nule, rezultă că X și Y sînt subscheme închise proprii ale lui V , deci $L_X = L \otimes O_X$ și $L_Y = L \otimes O_Y$ sînt ample pe X și Y respectiv prin ipoteza de inducție. După EGA III 2.3.1, $H^q(L_X^n) = H^q(L_Y^n) = 0$ pentru orice $q > 0$ și $n \geq 0$. Însă din șirurile exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I \otimes L^n & \longrightarrow & L^n & \longrightarrow & L_X^n \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & & & \\ 0 & \longrightarrow & J \otimes L^{n-1} & \longrightarrow & L^{n-1} & \longrightarrow & L_Y^{n-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

deducem că $H^q(L^n) = H^q(L^{n-1})$ pentru orice $q \geq 2$ și $n \geq 0$. De aici rezultă că dacă $n \geq 0$, $\chi(L^n) = \dim H^0(L^n) - \dim H^1(L^n) + \text{const.}$ Concluzia pasului 2 rezultă atunci din pasul 1.

Pasul 3. L^n este generat de secțiunile sale globale pentru $n \geq 0$.

Într-adevăr, după pasul 2 putem presupune $L = O_V(D)$ cu D divizor Cartier efectiv. Din șirul exact

$$0 \rightarrow L^{n-1} \rightarrow L^n \rightarrow L_D^n = L^n \otimes O_D \rightarrow 0$$

deducem, ținînd cont că $H^1(L_D^n) = 0$ pentru $n \geq 0$ (L_D este amplu pe D prin ipoteza de inducție), șirul exact de coomologie ($n \geq 0$):

$$(*) \quad H^0(L^n) \rightarrow H^0(L_D^n) \rightarrow H^1(L^{n-1}) \rightarrow H^1(L^n) \rightarrow 0.$$

În particular, dacă $n \geq 0$ avem $\dim H^1(L^n) \leq \dim H^1(L^{n-1})$, și cum $H^1(L^{n-1})$ este finit dimensional, rezultă că pentru $n \geq 0$ aplicațiile $H^1(L^{n-1}) \rightarrow H^1(L^n)$ sînt izomorfisme. Revenind la șirul exact (*) deducem că pentru $n \geq 0$ aplicația de restricție $H^0(L^n) \rightarrow H^0(L_D^n)$ este surjectivă. Cum L_D este amplu, L_D^n este generat de secțiunile sale globale pentru $n \geq 0$, deci există p secțiuni globale $s_1, \dots, s_p \in H^0(L_D^n)$ astfel încît pentru orice $x \in D$ cel puțin una din ele nu se anulează în punctul x . Ridicînd aceste secțiuni la $s'_1, \dots, s'_p \in H^0(L^n)$ și adăugînd și o secțiune $s'_0 \in H^0(L^n)$ astfel încît $D = \text{div}_V(s'_0)$, obținem $p + 1$ secțiuni globale ale lui L^n cu proprietatea că pentru orice $x \in V$ cel puțin una din ele nu se anulează în punctul x , ceea ce probează afirmația pasului 3.

Pasul 4. (Concluzie). După pasul 3 există un morfism $f: V \rightarrow P^n$ astfel încît $f^*(O_{P^n}(1)) \cong L^n$ (dacă n este suficient de mare). Atunci f este un morfism finit, deoarece în caz contrar ar exista o

curbă integră $C \subset V$ astfel încât $f(C)$ să fie un punct. Însă atunci $(L \cdot C)$ ar fi egal cu zero, ceea ce contrazice ipotezele. Cum f este morfism finit și $\mathcal{O}_{P^m}(1)$ amplu, rezultă, în baza unui rezultat deja folosit mai sus, că L^n este amplu, deci L însuși amplu. Q.E.D.

(1.23) *Observație.* Ca să demonstrăm că dacă V este o curbă integră și $\deg(L) > 0$, atunci L este amplu, am folosit teorema Riemann-Roch pentru curbe nesingulare. Observăm totuși că această teoremă poate fi evitată, deoarece pașii 1—4 demonstrează în particular același lucru direct.

(1.24) *COROLAR.* Dacă V este o suprafață completă peste k și L este un \mathcal{O}_V -modul inversibil, atunci L este amplu dacă și numai dacă $(L^2) > 0$ și $(L \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$. Dacă în plus $H^0(L) \neq 0$, atunci condiția $(L^2) > 0$ poate fi suprimată.

Demonstrație. Analizând demonstrația teoremei (1.22), observăm că am folosit condiția $(L^2) > 0$ doar pentru a ne putea reduce la cazul când $H^0(L) \neq 0$. Q.E.D.

(1.25) *TEOREMĂ.* Fie V o suprafață proiectivă peste k și L un \mathcal{O}_V -modul inversibil astfel încât $(L \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$. Atunci $(L^2) \geq 0$.

Demonstrație. Fie $a, b > 0$ numere naturale și $L' = L^a \otimes H^b$, unde H este o secțiune hiperplană pe X . Atunci

$$(L'^2) = a^2(L^2) + 2ab(L \cdot H) + b^2(H^2).$$

Punând $m_0 = (L^2)$, $m_1 = (L \cdot H)$, $m_2 = (H^2)$, fie $P(t) = m_2 t^2 + 2m_1 t + m_0$. Deoarece din ipoteze rezultă că $m_1 \geq 0$ și $m_2 > 0$ (H este divizor Cartier efectiv foarte amplu pe V), rezultă că $P(t)$ este o funcție strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. Dacă prin absurd $(L^2) = m_0 < 0$, atunci P ar avea o singură rădăcină reală și strict pozitivă t_0 . Dar dacă $b/a > t_0$, atunci $0 < a^2 P(b/a) = (L'^2)$. Cum pe de altă parte $(L' \cdot C) = a \cdot (L \cdot C) + b \cdot (H \cdot C) > 0$, rezultă, folosind (1.24), că L' este amplu. Deci L'^n este foarte amplu pentru $n \gg 0$, de unde, ținând cont de ipoteze:

$$(L' \cdot L) = 1/n \cdot (L'^n \cdot L) \geq 0$$

Fie $Q(t) = m_1 t + m_0$. Avem $a \cdot Q(b/a) = am_0 + bm_1 = a(L \cdot L) + b(L \cdot H) = (L' \cdot L) \geq 0$. Luând $a/b > t_0$ și $|a/b - t_0|$ suficient de mic, deducem că $Q(t_0) \geq 0$. Atunci $P(t_0) \geq P(t_0) - Q(t_0) = m_2 t_0^2 + m_1 t_0 \geq m_2 t_0^2 > 0$, contradicție! Q.E.D.

Utilizând teoria intersecției dezvoltată mai sus se poate demonstra esențialmente cu aceleași argumente următorul rezultat mai general decât (1.25), cf. Kleiman [1]:

(1.26) **TEOREMĂ.** (Kleiman). *Fie V o K -schemă completă de dimensiune ≥ 2 , și L un \mathcal{O}_V -modul inversibil. Atunci $(L^t \cdot W) \geq 0$ pentru orice subschemă închisă și integră W de dimensiune $t > 0$, dacă și numai dacă $(L \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$.*

(1.27) **Observație.** După cum rezultă din contraexemplele date de Mumford și Ramanujam, condiția „ $(L^t \cdot W) > 0$ pentru orice subschemă închisă și integră $W \subseteq V$ de dimensiune $t > 0$ ” nu rezultă în general din condiția „ $(L \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$ ”. Mai precis:

a) Mumford a construit un exemplu de suprafață proiectivă și nesingulară V peste corpul complex și un divizor D astfel încât $(D \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră $C \subset V$ și totuși $(D^2) = 0$ (a se vedea Hartshorne [3], pag. 56).

b) Ramanujam a construit un exemplu de varietate algebrică V proiectivă și nesingulară de dimensiune 3 și un divizor efectiv D astfel încât $(D \cdot C) > 0$ pentru orice curbă integră C pe V , și totuși fără ca D să fie amplu (a se vedea Hartshorne [3], pag. 57).

Ca o aplicație a criteriului Nakai-Moishezon pentru suprafețe, vom demonstra:

(1.28) **TEOREMĂ.** (Zariski-Goodman). *Fie X o suprafață completă și nesingulară și $U \subset X$ un deschis afin nevid. Atunci $F = X - U$ este o mulțime algebrică conexă, de codimensiune pură 1 în X și care suportă un divizor efectiv amplu. În particular, X este proiectivă.*

Demonstrație. Fie F_1, \dots, F_n componentele ireductibile (și reduse) ale lui F .

Pasul 1. $\dim(F_i) = 1$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Fie $x_i \in F_i - \bigcup_{j \neq i} F_j$ un punct închis, $i = 1, \dots, n$, și fie V_i o vecinătate deschisă și afină a lui x_i astfel încât $V_i \cap (\bigcup_{j \neq i} F_j) = \emptyset$. Atunci $V_i - V_i \cap U = V_i \cap F_i$ și $V_i \cap U$ este un deschis afin în X . Dacă F_i nu ar fi curbă, atunci F_i ar fi un punct, anume punctul x_i . Din criteriul de normalitate al lui Serre rezultă atunci cu ușurință că omomorfismul de restricție $H^0(V_i, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(V_i - \{x_i\}, \mathcal{O}_X)$ este un izomorfism, ceea ce contrazice faptul că V_i și $V_i \cap U = V_i - \{x_i\}$ sînt varietăți afine în care incluziunea $V_i \cap U \hookrightarrow V_i$ nu este un izomorfism.

Pasul 2. F este o mulțime conexă.

Fie Y o închidere proiectivă a deschisului afin U . Obținem o aplicație birațională $f : X \rightarrow Y$ astfel încât $f|_U$ este un izomorfism. Din teorema de eliminare a nedeterminărilor (cf. Safarevici [1], pag. 296) rezultă că după un număr finit de eclatări de puncte din afara lui U , obținem un morfism birațional $g : X' \rightarrow X$ astfel încât $f \circ g$ să fie un morfism, iar $g^{-1}(U) = U'$ este izomorf via g cu U . Se observă că este suficient să demonstrăm că $X' - U'$ este conex, altfel spus, putem, fără a restringe generalitatea, presupune că f este un morfism birațional. Mai mult, putem presupune Y normală, înlocuind eventual pe Y cu normalizata sa via factorizarea Stein a morfismului f . Presupunem prin absurd că $X - U$ nu ar fi conexă. Deoarece este clar că $Y - f(U)$ suportă un divisor amplu (anume intersecția lui Y cu hiperplanul de la infinit), rezultă din lema Enriques-Severi-Zariski-Serre (cf. Serre [1], § 76, teorema 4) că $Y - f(U)$ este conexă. Cum din teorema de conexiune a lui Zariski (cf. EGA III 4.3.1) deducem că morfismul f are fibre conexe, rezultă atunci că $X - U = f^{-1}(Y - f(U))$ este de asemenea conexă.

Pasul 3. Există un divisor $D' = \sum_{i=1}^n m_i F_i$, cu $m_i \geq 0$, astfel încât $(D' \cdot F_i) \geq 0$ pentru orice i și $(D' \cdot F_i) > 0$ pentru cel puțin un i .
Într-adevăr, fie $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ o funcție neconstantă; adăugând eventual o constantă convenabilă lui f , putem presupune că pentru orice i există un $x_i \in F_i$ astfel încât $f(x_i) \neq 0$. Fie atunci $D = \text{div}(f)_0$ și $D' = \text{div}(f)_\infty$, divisorul zerourilor și respectiv divisorul polurilor funcției f . Avem $D - D' = \text{div}(f)$, iar $\text{Supp}(D') \subseteq F$, deci $D' = \sum_{i=1}^n m_i F_i$ cu $m_i \geq 0$ pentru orice i și $m_i > 0$ pentru cel puțin un i . Însă cum $(D \cdot F_i) \geq 0$ pentru orice i și $(D \cdot F_i) > 0$ pentru cel puțin un i (altfel U ar conține curbe complete), pasul 3 rezultă ținând cont că $D' \sim D$.

Pasul 4. Folosind pașii 2 și 3, putem renumera componentele F_i (acceptând și repetiții) astfel încât $(D' \cdot F_1) > 0$ și $(F_i \cdot F_{i+1}) > 0$ pentru orice i . Vom nota prin F_1, \dots, F_m componentele lui F în noua ordine (cu repetiții).

Pasul 5. Arătăm prin inducție după $r = 1, \dots, m+1$ că există un divisor $D_r = \sum_{i=1}^m n_i F_i$, $n_i \geq 0$, astfel încât

- $(D_r \cdot F_i) \geq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, m$.
- $(D_r \cdot F_i) > 0$ pentru orice $i = 1, \dots, \min(r, m)$.
- $F_1, \dots, F_{r-1} \subseteq \text{Supp}(D_r)$.

Într-adevăr, pentru $r = 1$ luăm $D_1 = D'$ construit la pasul 3. Presupunem acum că am construit D_1, \dots, D_r , $r \leq m$. După b) avem $(D_r \cdot F_r) > 0$. Putem deci alege un întreg $e_r > 0$ cu proprietatea $e_r(D_r \cdot F_r) + (F_r^2) > 0$ și atunci punem $D_{r+1} = e_r D_r + F_r$. Este clar că F_1, \dots, F_r apar în D_{r+1} cu coeficienți strict pozitivi și că $\text{Supp}(D_{r+1}) = \text{Supp}(D_r) \cup F_r$. Avem $(D_{r+1} \cdot F_i) = e_r(D_r \cdot F_i) + (F_r \cdot F_i)$, și deci $(D_{r+1} \cdot F_r) > 0$ ținând cont de modul de alegere al lui e_r . Prin inducție și pasul 4 rezultă imediat $(D_{r+1} \cdot F_i) \geq 0$ pentru orice i . Rămîne de probat b) pentru D_{r+1} . Deosebim două cazuri:

1) $r < m$. Avem $\min(r+1, m) = r+1$. Atunci $(D_{r+1} \cdot F_i) > 0$, prin inducție dacă $i < r$ și $F_i \neq F_r$, prin modul de alegere al lui e_r dacă $F_i = F_r$, și prin inducție și ordinea de la pasul 4 dacă $i = r+1$.

2) $r = m$. Atunci pentru orice $i = 1, \dots, m$ avem $(D_{r+1} \cdot F_i) > 0$ prin inducție dacă $F_i \neq F_m$ sau prin modul de alegere al lui e_m dacă $F_i = F_m$.

Pasul 6. (Concluzie) D_{m+1} este amplu.

Pentru aceasta folosim criteriul Nakai-Moishezon (1.24). Fie $C \subset X$ o curbă integră arbitrară. Atunci U fiind afină, $C \not\subset U$. Dacă $C \neq F_i$ pentru orice i , avem $(C \cdot F_i) \geq 0$ pentru orice i , cu inegalitate strictă pentru cel puțin un i . Deci după pasul 5 c), $(D_{m+1} \cdot C) > 0$. Pe de altă parte, dacă $C = F_i$ pentru un i , atunci $(D_{m+1} \cdot C) > 0$ după pasul 5 b). În fine, deoarece D_{m+1} este divizor efectiv, putem aplica ultima parte a corolarului (1.24). Q.E.D.

(1.29) *Observație.* Analogul în dimensiune ≥ 3 al teoremei (1.28) este fals. Într-adevăr, există exemple elementare (datorate lui Hironaka) de varietăți algebrice de dimensiune 3, care sînt complete și nesingulare, dar care nu sînt proiective (vezi Safarevici [1], pag. 399).

(1.30) *Referințe bibliografice.* Principala sursă bibliografică a acestui paragraf o constituie Kleiman [1]. Teorema (1.28) aparține lui Zariski, iar demonstrația prezentată aici lui Goodman (vezi Hartshorne [3], pag. 69–71).

§ 2.

TEOREMA LUI HODGE DE INDEX. STRUCTURA MATRICEI DE INTERSECȚIE A UNEI FIBRE

În tot acest paragraf prin X vom nota o suprafață proiectivă și nesingulară definită peste corpul algebric închis k de caracteristică arbitrară, iar prin K , un divizor canonic pe X .

(2.1) LEMĂ. Fie D_1 și D_2 doi divizori pe suprafața X și fie $E_2 \in |D_2|$. Atunci funcția $E \mapsto E + E_2 : |D_1| \rightarrow |D_1 + D_2|$ este injectivă, deci $\dim |D_1| \leq \dim |D_1 + D_2|$.

Demonstrația este evidentă.

(2.2) PROPOZIȚIE. Dacă D este un divizor pe X astfel încât $(D^2) > 0$ și dacă H este o secțiune hiperplană pe X , atunci are loc una și numai una din situațiile:

i) $(D \cdot H) > 0$ și $\dim |nD| \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \infty$, sau

ii) $(D \cdot H) < 0$ și $\dim |nD| \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \infty$.

Demonstrație. Din teorema Riemann-Roch deducem:

$\dim |nD| + \dim |K - nD| \geq \frac{1}{2} n^2 (D^2) - \frac{1}{2} n (D \cdot K) + \chi(O_X) - 2$, și deci $\dim |nD| + \dim |K - nD| \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \infty$ (deoarece $(D^2) > 0$).

Afirmația 1: Nu poate avea loc situația $\dim |nD| \rightarrow \infty$ și $\dim |K - nD| \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \infty$ (sau când $n \rightarrow -\infty$).

Într-adevăr, în caz contrar ar exista un $E \in |nD|$, deci după (2.1), $\dim |K - nD| \leq \dim |K|$, absurd.

Afirmația 2: $\dim |nD|$ nu poate tinde la ∞ atât pentru $n \rightarrow \infty$, cât și pentru $n \rightarrow -\infty$.

Într-adevăr, dacă $\dim |nD| \rightarrow \infty$ când $n \rightarrow \pm \infty$, atunci pentru $n \geq 0$ ar exista un $E \in |-nD|$, deci după (2.1) $\dim |nD| + \dim |E| = \dim |nD - nD| \geq \dim |nD| \rightarrow \infty$, absurd.

Afirmația 3 : $\dim |K - nD|$ nu poate tinde la ∞ atît pentru $n \rightarrow \infty$ cît și pentru $n \rightarrow -\infty$.

Într-adevăr, în caz contrar pentru $n \geq 0$ ar exista un $E \in |K - nD|$ și după (2.1) avem $\dim |2K| = \dim |(K + nD) + (K - nD)| \geq \dim |K - nD| \rightarrow \infty$, absurd.

Din aceste trei afirmații rezultă imediat concluzia. Q.E.D.

(2.3) COROLAR. Dacă D este un divizor pe X și H o secțiune hiperplană pe X astfel încît $(D \cdot H) = 0$, atunci $(D^2) \leq 0$, iar $(D^2) = 0$ dacă și numai dacă $D \approx 0$.

Demonstrație. Numai ultima afirmație necesită demonstrație. Dacă D nu ar fi numeric echivalent cu zero, ar exista un divizor E pe X astfel încît $(D \cdot E) \neq 0$. Punînd $E' = (H^2) \cdot E - (E \cdot H) \cdot H$, avem :

$$(D \cdot E') = (H^2) \cdot (D \cdot E) - (E \cdot H) \cdot (H \cdot D) = (H^2) \cdot (D \cdot E) \neq 0.$$

$$(H \cdot E') = (H^2) \cdot (H \cdot E) - (H \cdot E) \cdot (H^2) = 0.$$

Înlocuind pe E cu E' putem deci presupune în plus că $(H \cdot E) = 0$. Punînd $D' = nD + E$, avem $(D' \cdot H) = 0$ și $(D^2) = 2n \cdot (D \cdot E) + (E^2)$ pentru orice n întreg. Alegînd pe n convenabil obținem $(D^2) > 0$ și $(D' \cdot H) = 0$, ceea ce contrazice (2.2). Q.E.D.

(2.4) COROLAR. (Teorema lui Hodge de index). Dacă E este un divizor pe X astfel încît $(E^2) > 0$, atunci pentru orice divizor D pe X astfel încît $(E \cdot D) = 0$, avem $(D^2) \leq 0$, și în plus $(D^2) = 0$ dacă și numai dacă $D \approx 0$.

Demonstrație. Dacă notăm $M = \text{Num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, atunci din teorema lui Néron-Severi rezultă că M este un \mathbb{R} -spațiu vectorial de dimensiune finită (anume $\dim_{\mathbb{R}}(M) = \rho = \text{rang } NS(X)$). În plus, indicele de intersecție definește pe M o formă bilineară simetrică și nedegenerată pe M . Dacă h este clasa în M a unei secțiuni hiperplane H de pe X , și dacă completăm pe h la o bază a lui M peste \mathbb{R} , $h_1 = h, h_2, \dots, h_\rho$, astfel încît $(h \cdot h_i) = 0$ pentru orice $i \geq 2$, atunci corolarul (2.3) afirmă că (\cdot) are semnatura $(1, \rho - 1)$ în această bază. Corolarul (2.4) rezultă din binecunoscuta teoremă a lui Sylvester privind invarianța semnăturii unei forme bilineare simetrice pe M . Q.E.D.

(2.5) PROPOZIȚIE. Fie $x \cdot y$ o formă bilineară simetrică pe \mathbb{Q} -spațiul vectorial M și fie $\{e_i\}_{i \in I}$ o familie finită de elemente din M ce generează pe M și astfel încît $e_i \cdot e_j \geq 0$ pentru orice $i \neq j$. Presupunem că există un $z \in M$, $z = \sum_i a_i e_i$, $a_i > 0$ pentru orice i , cu proprietatea $z \cdot e_i = 0$ pentru orice i . Atunci $x \cdot x \leq 0$ pentru orice $x \in M$, și, în plus, $\{x \in M \mid x \cdot x = 0\}$ este un subspațiu vectorial al lui M ,

de dimensiune egală cu numărul componentelor conexe ale grafului ale cărui vîrfuri sînt elementele lui I și ale cărui săgeți $\{i, j\}$ sînt astfel încît $e_i \cdot e_j > 0$.

Demonstrație. Fiecare $x \in M$ poate fi scris sub forma $x = \sum_i c_i a_i e_i$, $c_i \in \mathbb{Q}$. Ținînd cont că $\sum_j a_j e_j \cdot e_i = 0$, avem :

$$\begin{aligned} - \sum_i (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_i e_i) &= \sum_{i,j} (c_i a_i e_i) \cdot (c_j a_j e_j) - \\ - \sum_i (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_i e_i) &= \sum_{i \neq j} c_i^2 (a_i e_i) \cdot (a_j e_j) = \\ &= 1/2 \sum_{i \neq j} (c_i^2 + c_j^2) (a_i e_i) \cdot (a_j e_j) \geq \sum_{i \neq j} c_i c_j (a_i e_i) \cdot (a_j e_j), \end{aligned}$$

de unde $x \cdot x \leq 0$. În plus, $x \cdot x = 0$ dacă și numai dacă $e_i \cdot e_j = 0$ sau dacă $e_i \cdot e_j > 0$, atunci $c_i = c_j$, deci dacă și numai dacă funcția $i \mapsto c_i$ este constantă pe fiecare componentă conexă a grafului asociat lui I . O.E.D.

(2.6) COROLAR. Fie $f: X \rightarrow B$ un morfism de la o suprafață X pe o curbă nesingulară B , și fie $D = \sum_i n_i E_i$, cu E_i curbe integrale, $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$, o fibră a lui f (deci $n_i > 0$). Atunci pentru orice divizor de forma $D' = \sum_i n'_i E_i$, cu n'_i numere întregi, avem $(D')^2 \leq 0$. Dacă în plus f are fibre conexe, atunci $(D')^2 = 0$ dacă și numai dacă există $a \in \mathbb{Q}$ astfel încît $D' = a \cdot D$.

Demonstrația rezultă direct din (2.5), luînd $M = \bigoplus_i \mathbb{Q} E_i$, indicele de intersecție drept formă bilineară simetrică pe M și $z = D$, deoarece se observă că $(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i .

(2.7) COROLAR. Fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism birațional de la suprafața proiectivă și nesingulară X la suprafața normală Y . Fie y un punct și $f^{-1}(y) = \sum_{i=1}^n n_i E_i$ fibra corespunzătoare, în care presupunem că E_i sînt curbe integrale distincte două eîte două. Atunci matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este definită negativ.

Demonstrație. Pentru fiecare i există o curbă integră D_i pe X diferită de E_j , $j = 1, \dots, n$, astfel încît $(D_i \cdot E_i) > 0$ (adică $D_i \cap E_i \neq \emptyset$). Deoarece f este morfism propriu, $f(\bigcup_{i=1}^n D_i)$ este o submulțime închisă în Y ce conține pe y . Fie g o funcție rațională nenulă pe Y , definită într-o vecinătate deschisă U a lui y , și care se anulează pe $f(\bigcup_{i=1}^n D_i) \cap U$. Atunci $\text{div}_X(f^*(g)) = \sum_{i=1}^n m_i E_i + D$, eu $m_i \geq 1$ pentru orice i , $\text{Supp}(D) \supseteq \bigcup_{i=1}^n D_i$, iar curbele E_1, \dots, E_n nu sînt

componente ale lui D . Deoarece $D/f^{-1}(U)$ este efectiv și $E_i \subset f^{-1}(U)$ pentru orice i , avem $(E_i \cdot D) > 0$ pentru orice i . De asemenea :

$$\left(E_j \cdot \sum_{i=1}^n m_i E_i + D \right) = (E_j \cdot \operatorname{div}_X(f^*(g))) = 0,$$

$$\left(D \cdot \sum_{i=1}^n m_i E_i + D \right) = (D \cdot \operatorname{div}_X(f^*(g))) = 0 \text{ pentru orice } j.$$

Luînd în (2.5) drept M \mathbb{Q} -spațiul vectorial generat de baza $e_1 = E_1, \dots, e_n = E_n, e_{n+1} = D, a_1 = m_1, \dots, a_n = m_n, a_{n+1} = 1$, indicele de intersecție drept formă bilineară simetrică, rezultă că dacă $D' = \sum_{i=1}^n m_i E_i$ avem $(D'^2) \leq 0$ și în plus $(D'^2) = 0$ dacă și numai dacă există un număr rațional a astfel încît $D' = a \cdot \left(\sum_{i=1}^n m_i E_i + D \right)$, deci dacă și numai dacă $D' = 0$. Q.E.D.

(2.8) *Referințe bibliografice.* Prima demonstrație algebrică (și foarte elementară) a teoremei lui Hodge de Index a fost dată de Grothendieck [1]. Demonstrația prezentată aici este esențialmente cea a lui Grothendieck (cf. Mumford [1] sau Bombieri-Husemoller [1]). Propoziția (2.5) se găsește în Safarevici [2] însă cu o demonstrație mai complicată. Demonstrația dată aici este cea din Bombieri-Husemoller [1]. Corolarul (2.7) a fost demonstrat de Mumford (a se vedea Mumford, *The topology of normal singularities of surfaces and a criterion for simplicity*, Publ. Math IHES, 9, (1961), dar această proprietate a fost remarcată mult mai devreme de P. Du-Val (a se vedea P. Du-Val, *On isolated singularities which do not affect the condition of adjunction I*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 30 (1933/34), 483—491).

3.

CRITERII DE CONTRACTIBILITATE
ȘI SINGULARITĂȚI RAȚIONALE

În continuare prin cuvîntul suprafață vom înțelege o suprafață proiectivă și nesingulară. Dacă vor apărea și altfel de suprafețe, atunci vom specifica despre ce fel de suprafețe este vorba, de exemplu suprafețe normale, suprafețe afine etc.

Dacă X este o suprafață și $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ este o curbă conexă pe X de componente integrale E_1, \dots, E_n (distincte două câte două), atunci (2.7) arată că o condiție necesară pentru ca E să fie contractibilă la un punct este ca matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ să fie negativ definită. În general această condiție nu este și suficientă, după cum arată exemplul de mai jos al lui Nagata. Totuși, dacă ne situăm în categoria mai largă a spațiilor algebrice de dimensiune 2, această condiție este și suficientă (a se vedea M. Artin [3]). Altfel spus, dacă matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este negativ definită, există un morfism birațional $f: X \rightarrow Y$ cu Y spațiu algebric normal (de dimensiune 2) astfel încît $f(E)$ este un punct pe Y , iar restricția lui f la $X - E$ este un izomorfism pe $Y - f(E)$.

(3.1) *Exemplu.* (Nagata). Fie $k = \mathbb{C}$ corpul numerelor complexe, E_0 o curbă nesingulară de grad trei în $X_0 = P^2$ și fie $0 \in E_0$ un punct de inflexiune (adică un punct cu proprietatea că tangenta în 0 la E_0 nu mai intersectează pe E_0 în alt punct), de exemplu curba E_0 dată de ecuația

$$x_1^2 x_2 - x_0^3 + x_0 x_2^2 = 0$$

și punctul $0 = (0, 1, 0)$. După cum este bine cunoscut, E_0 admite o unică structură de grup algebric astfel încît 0 să fie elementul neutru (a se vedea de exemplu Safarevici [1], pag. 215). În plus, din descrierea geometrică a acestei structuri de grup rezultă că dacă F_0 este o altă curbă în $X_0 = P^2$ astfel încît $E_0 \cap F_0 = \{y_1, \dots, y_m\}$,

cu precizarea că fiecare punct y_i apare de $(E_0 \cdot F_0)_{y_i}$ ori, atunci $y_1 + \dots + y_m = 0$. Ca grup abstract, E_0 este atunci izomorf cu grupul aditiv $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de unde rezultă că există un punct $x_0 \in E_0$ de ordin infinit (aici intervine esențial faptul că ne-am restrâns la corpul complex; de exemplu, dacă k este închiderea algebrică a unui corp finit, atunci orice punct al lui E_0 are ordin finit!).

Fie X_1 suprafața obținută eclatînd $X_0 = P^2$ în punctul x_0 și fie E_1 transformata proprie a curbei E_0 . Deoarece $(E_0^2) = 9$, avem $(E_1^2) = 8$. Fie $x_1 \in E_1$ unicul punct deasupra lui x_0 și fie X_2 suprafața obținută eclatînd X_1 în x_1 ; dacă E_2 este transformata proprie a lui E_1 și $x_2 \in E_2$ unicul punct deasupra lui x_1 , avem $(E_2^2) = 7$, și fie X_3 suprafața obținută eclatînd X_2 în punctul x_2 , ș.a.m.d. obținem suprafața $X = X_{10}$ și curba eliptică $E = E_{10}$ pe X cu proprietatea că $(E^2) = -1$.

Afirmatie: Curba E de pe X nu este contractibilă la un punct.

Dacă prin absurd ar exista un morfism $f: X \rightarrow Y$ cu proprietățile: $f(E)$ este un punct normal pe Y și restricția lui f la $X - E$ este un izomorfism între $X - E$ și $Y - y$, unde am notat prin y punctul $f(E)$, atunci ar exista în mod evident o curbă D' din Y ce nu ar trece prin y . De aici ar rezulta că ar exista o curbă D'' de pe X ce nu ar intersecta pe $E = E_{10}$. Fie atunci D curba din $X_0 = P^2$ peste care se proiectează D'' . Cum D'' nu taie pe E , atunci D nu taie pe E_0 în nici-un punct diferit de punctul x_0 . Fie atunci $m = (D \cdot E_0) = (D \cdot E_0)_{x_0}$. Din cele spuse mai sus rezultă că $m \cdot x_0 = 0$, ceea ce contrazice faptul că x_0 este un punct de ordin infinit pe curba eliptică E_0 . Q.E.D.

(3.2) În continuare ne propunem să dăm criterii suficiente de contractibilitate în categoria suprafețelor algebrice, criterii ce vor fi folosite în mod esențial mai târziu.

Fie deci X o suprafață (peste un corp algebric închis de caracteristică arbitrară) și $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ o curbă conexă pe X de componente integrale E_1, \dots, E_n (distincte două câte două) și fie $Z = \sum_{i=1}^n r_i E_i$, cu $r_i \geq 0$, un divizor efectiv de suport conținut în $|E|$.

(3.3) LEMĂ. În situația descrisă la (3.2), următoarele afirmații sînt echivalente:

a) $H^1(\mathcal{O}_Z) = 0$.

b) Pentru orice divizor $0 < Z' \leq Z$ avem $p_a(Z') \leq 0$.

Demonstrație. Genul aritmetic al lui Z' este dat de una din formulele:

$$p(Z') = 1/2 (Z' + K \cdot Z') + 1 = 1 - \chi(\mathcal{O}_{Z'}),$$

unde K este un divizor canonic pe X .

a) \Rightarrow b) : Omomorfismul surjectiv $O_Z \rightarrow O_{Z'}$, induce, ținând cont că Z este curbă, surjecția $H^1(O_Z) \rightarrow H^1(O_{Z'})$, deci $H^1(O_{Z'}) = 0$. Cum însă $p_a(Z') = 1 - \dim H^0(O_{Z'}) + \dim H^1(O_{Z'}) = 1 - \dim H^0(O_{Z'}) \leq 0$, obținem concluzia.

b) \Rightarrow a) : Din ipotezele lui b) rezultă în particular că $p_a(E_i) = 0$ pentru orice i cu proprietatea că E_i intră în componența lui Z , și deci E_i este curbă nesingulară rațională. Vom demonstra implicația

b) \Rightarrow a) prin inducție după $\sum_{i=1}^n r_i$, observînd că am probat deja afirmația

în cazul $\sum_{i=1}^n r_i = 1$. Presupunem deci $\sum_{i=1}^n r_i > 1$ și lema adevărată pentru

$\sum_{i=1}^n r_i - 1 \geq 1$. Putem presupune $r_1 > 0$. Deoarece implicația este adevărată pentru $Z_1 = Z - E_1$, avem $H^1(O_{Z_1}) = 0$. Însă surjecția $O_Z \rightarrow O_{Z_1}$ de nucleu idealul $I_{Z_1, Z} = O_X(-Z_1)/O_X(-Z) = O_X(-Z_1) \otimes O_{E_1}$ (deci $\deg_{E_1}(I_{Z_1, Z}) = -(Z_1 \cdot E_1)$) induce omomorfismul surjectiv

$$H^1(I_{Z_1, Z}) \rightarrow H^1(O_Z) \rightarrow H^1(O_{Z_1}) = 0.$$

Dacă arătăm că există o componentă E_1 în Z cu proprietatea $(-Z_1 \cdot E_1) \geq -1$, atunci ținând cont că E_1 este o dreaptă proiectivă, va rezulta $H^1(I_{Z_1, Z}) = 0$, și prin urmare $H^1(O_Z) = 0$. Inegalitatea $-(Z_1 \cdot E_1) \geq -1$ este echivalentă cu $(Z \cdot E_1) \leq 1 + (E_1^2)$. Dacă prin absurd am avea $(Z \cdot E_i) \geq 2 + (E_i^2)$ pentru orice componentă E_i din Z , atunci din $p_a(E_i) = 0$ am deduce $(K \cdot E_i) = -2 - (E_i^2)$ și prin urmare $p_a(Z) = 1/2(Z + K \cdot Z) + 1 = 1/2(Z + K \cdot \sum_{i=1}^n r_i E_i) + 1 =$
 $= 1/2 \sum_{i=1}^n r_i (Z + K \cdot E_i) + 1 \geq 1/2 \sum_{i=1}^n r_i [2 + (E_i^2) - 2 - (E_i^2)] + 1 = 1$,
 adică $p_a(Z) \geq 1$, ceea ce contrazice pe b). Q.E.D.

(3.4) LEMĂ. În ipotezele și notațiile lemei (3.3), condițiile a) sau b) sînt de asemenea echivalente cu oricare din următoarele două condiții :

c) Omomorfismul canonic $d : H^1(O_Z^*) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ care asociază fiecărui O_Z -modul inversibil L n -uplul $(\deg_{E_1}(L|E_1), \dots, \deg_{E_n}(L|E_n))$ este un izomorfism dacă E_1, \dots, E_n sînt toate componentele lui Z .

c') Omomorfismul d de la c) are nucleul finit.

(3.5) Observație. Deoarece în paragrafele următoare vom utiliza în mod intensiv teoria schemei Picard pentru curbe și suprafețe, observăm că în contextul acestei teorii lema (3.4) rezultă imediat în felul următor : Deoarece Z este curbă, componenta conexă $\text{Pic}^0(Z)$

a originii din schema lui Picard $\text{Pic}(Z)$ este redusă, și cum $\text{Pic}^\circ(Z)$ este o schemă în grupuri comutative, rezultă că $\text{Pic}^\circ(Z)$ este un grup algebric comutativ. În plus, spațiul tangent în origine la $\text{Pic}^\circ(Z)$ se identifică în mod canonic cu $H^1(O_Z)$, deci condiția a) din (3.3) înseamnă exact că $\text{Pic}^\circ(Z) = 0$, adică exact condiția c'). Cu toate acestea vom demonstra și direct (după M. Artin [1]) această leamnă cheie.

Demonstrația lemei (3.4). Fie $Z = \sum_{i=1}^n r_i E_i$ cu $r_i \geq 1$. Fie $E = Z_{\text{red}} = \sum_{i=1}^n E_i$. Avem șirul exact

$$0 \rightarrow I \rightarrow O_Z \rightarrow O_E \rightarrow 0$$

în care idealul I este nilpotent. Obținem șirul exact de fascicule de grupuri multiplicative :

$$1 \rightarrow J \rightarrow O_Z^* \rightarrow O_E^* \rightarrow 1.$$

Deoarece Z este curbă și omomorfismele $H^0(O_Z) \rightarrow H^0(O_E)$ și $H^0(O_Z^*) \rightarrow H^0(O_E^*)$ sînt surjective (E fiind conexă și redusă, avem $H^0(O_E) = k$ și $H^0(O_E^*) = k^*$), obținem șirurile exacte

$$0 \rightarrow H^1(I) \rightarrow H^1(O_Z) \rightarrow H^1(O_E) \rightarrow 0,$$

$$1 \rightarrow H^1(J) \rightarrow H^1(O_Z^*) \rightarrow H^1(O_E^*) \rightarrow 1.$$

Dacă în plus $I^2 = 0$, atunci I este izomorf cu J prin aplicația $x \mapsto 1 + x$, și deci $H^1(I) \cong H^1(J)$. Dacă I^2 nu este nul, există în orice caz un întreg $t > 0$ astfel încît $I^t = 0$ (deoarece $Z_{\text{red}} = E$). Fie Z_r subschema închisă a lui Z de ideal I^r , $1 \leq r \leq t$. Presupunem că $r < t$. Atunci avem diagrama comutativă cu liniile și coloanele exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & I' & \xlongequal{\quad} & I' & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I_{r+1} = I/I^{r+1} & \longrightarrow & O_{Z_{r+1}} & \longrightarrow & O_E \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & I_r = I/I^r & \longrightarrow & O_{Z_r} & \longrightarrow & O_E \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

în care $I'^2 = 0$. În mod asemănător avem și diagrama comutativă cu liniile și coloanele exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & J' & \xlongequal{\quad} & J' & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & J_{r+1} & \longrightarrow & O_{Z_{r+1}}^* & \longrightarrow & O_H^* \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & J_r & \longrightarrow & O_{Z_r}^* & \longrightarrow & O_E^* \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
 \end{array}$$

Deoarece $I'^2 = 0$ avem izomorfismul $\varepsilon : I' \xrightarrow{\sim} J'$, $\varepsilon : x \mapsto 1 + x$, deci diagrama cu liniile exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^0(I_r) & \xrightarrow{\delta} & H^1(I') & \longrightarrow & H^1(I_{r+1}) & \longrightarrow & H^1(I_r) \longrightarrow 0 \\
 \varepsilon' \downarrow & & \varepsilon \downarrow & & & & \\
 H^0(J_r) & \xrightarrow{\delta'} & H^1(J') & \longrightarrow & H^1(J_{r+1}) & \longrightarrow & H^1(J_r) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

în care ε' este bijecția $u \mapsto 1 + u$ (care, dacă $I_r^2 \neq 0$, nu este neapărat omomorfism de grupuri). Totuși, dacă arătăm că pătratul din această diagramă este comutativ, atunci rezultă că omomorfismul ε induce izomorfismul de grupuri $\bar{\varepsilon} : \text{Coker}(\delta) \xrightarrow{\sim} \text{Coker}(\delta')$, și prin urmare rezultă (prin inducție după r) că am demonstrat :

(3.4.1) Dacă $I' = 0$, există un șir de subgrupuri

$$\begin{aligned}
 H^1(I) &= I'_0 \supseteq I'_1 \supseteq \dots \supseteq I'_t = 0, \\
 H^1(J) &= J'_0 \supseteq J'_1 \supseteq \dots \supseteq J'_t = 0,
 \end{aligned}$$

și izomorfismele $I'_r/I'_{r+1} \cong J'_r/J'_{r+1}$, $r = 0, 1, \dots, t-1$.

Trebuie deci verificată comutativitatea pătratului din diagrama de mai sus. Fie pentru aceasta $u \in H^0(I_r)$ un element arbitrar și

$\{U_i\}$ o acoperire deschisă și finită a lui E și secțiunile $u_i \in \Gamma(U_i, I_{r+1})$ astfel încît $u_i/Z_r = u$. Atunci $u_i - u_j$ pune în evidență un 1-cociclu ce reprezintă pe $\delta(u)$, deci $\varepsilon\delta(u)$ este clasa cociclului $\{1 + u_i - u_j\}_{i,j}$. Pe de altă parte, $\varepsilon'(u) = 1 + u$ poate fi ridicată pe fiecare U_i la secțiunea $1 + u_i \in \Gamma(U_i, J_{r+1})$, deci $\delta'\varepsilon'(u)$ este reprezentat de cociclu $\{(1 + u_i)/(1 + u_j)\}_{i,j}$. Însă deoarece $u_i - u_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, I')$ și $I' \cdot I_{r+1} = 0$, avem $(u_i - u_j) \cdot u_j = 0$, de unde $(1 + u_j) \cdot (1 + u_i - u_j) = 1 + u_i$, sau încă $(1 + u_i)/(1 + u_j) = 1 + u_i - u_j$.

(3.4.1) ne reduce acum la considerarea cazului particular $Z = E = \sum_{i=1}^n E_i$. Fie atunci $\bar{E} = \prod_i E_i$ suma topologică disjunctă a curbelor E_i și $\pi: \bar{E} \rightarrow E$ morfismul canonic. Atunci π este morfism finit și izomorfism în afara unui număr finit de puncte. Avem $\bar{E} = \text{Spec } \prod_{i=1}^n O_{E_i}$ deoarece $\pi_* O_{\bar{E}} = \prod_{i=1}^n O_{E_i}$. Deoarece E este redusă, aplicațiile canonice $O_E \rightarrow \prod_i O_{E_i}$ și $O_E^* \rightarrow (\prod_i O_{E_i})^* = \prod_{i=1}^n O_{E_i}^*$ sînt injective, de conuclee coerente și concentrate într-un număr finit de puncte. Deoarece $\pi_* O_{\bar{E}} = \prod_i O_{E_i}$ și $\pi_* O_{\bar{E}}^* = \prod_i O_{E_i}^*$, rezultă aplicațiile surjective

$$H^1(O_E) \rightarrow H^1(O_{\bar{E}}) \text{ și } H^1(O_E^*) \rightarrow H^1(O_{\bar{E}}^*),$$

căroră dorim să le comparăm nucleele.

În acest scop descompunem morfismul canonic π în $\bar{E} \rightarrow E' \rightarrow E$, unde $O_{E'}$ este O_E -subalgebra lui $\prod_i O_{E_i}$ ale cărei secțiuni sînt sisteme $f = (f_1, \dots, f_n) \in \Gamma(U, \prod_i O_{E_i})$, cu U deschis în E , astfel încît $f_i(P) = f_j(P)$ dacă $P \in E_i \cap E_j \cap U$. Din definiția lui E' rezultă șirul exact:

$$(3.4.2) \quad 0 \rightarrow O_{E'} \rightarrow \prod_i O_{E_i} \rightarrow F \rightarrow 0$$

în care dacă $P \in E$, atunci F_P este suma directă de $n_P - 1$ exemplare de spații vectoriale egale cu k , unde n_P este numărul componentelor E_i ce trec prin P (deci $F_P = 0$ dacă $n_P = 1$). Deoarece $H^1(F) = 0$ din (3.4.2) rezultă că nucleul aplicației surjective $H^1(O_{E'}) \rightarrow H^1(O_E)$ este un k -spațiu vectorial de dimensiune $N = \sum_P (n_P - 1) - n + 1$.

În mod cu totul și cu totul analog, considerînd șirul exact

$$(3.4.3) \quad 1 \rightarrow O_{E'}^* \rightarrow \prod_i O_{E_i}^* \rightarrow G \rightarrow 1$$

rezultă că aplicația $H^1(O_{E'}^*) \rightarrow H^1(O_E^*)$ este surjectivă, iar nucleul său este izomorf cu suma directă a N exemplare izomorfe cu grupul multiplicativ k^* .

Toate aceste considerații ne reduc la considerarea aplicațiilor injective $\lambda: O_E \rightarrow O_{E'}$ și $\lambda^*: O_E^* \rightarrow O_{E'}^*$ de conuclee din nou concentrate într-un număr finit de puncte. (Notăm că morfismul $E' \rightarrow E$ este bijectiv.) Deoarece $H^0(O_E) = H^0(O_{E'}) = k$, deducem că $\text{Ker}(H^1(O_E) \xrightarrow{\bar{\lambda}} H^1(O_{E'}))$ este suma directă a grupurilor aditive $O_{E',P}/O_{E,P}$ cînd $P \in E$. Asemănător, $\text{Ker}(H^1(O_E^*) \xrightarrow{\bar{\lambda}^*} H^1(O_{E'}^*))$ este suma directă a grupurilor multiplicative $O_{E',P}^*/O_{E,P}^*$ cînd $P \in E$. În plus, $\bar{\lambda}$ și $\bar{\lambda}^*$ sînt aplicații surjective.

Avînd în vedere (3.4.1) și concluziile deduse din șirurile exacte (3.4.2) și (3.4.3), demonstrația lemei (3.4) se încheie imediat dacă demonstrăm:

(3.4.4) Există un întreg $p \geq 0$, subinelele $O_{E',P} = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_p = O_{E,P}$ și izomorfismele de grupuri $A_r/A_{r+1} \cong A_r^*/A_{r+1}^*$, $r = 0, 1, \dots, p-1$.

Demonstrația lui (3.4.4). Dacă $n_p = 1$, luăm $p = 0$. În caz contrar fie $A' = O_{E',P}$ și $A = O_{E,P}$ de ideale maximale m' și m respectiv. Deoarece $\dim_k(A'/A) < \infty$, conductorul lui A' în A este un ideal m -primar (vezi Serre [3], chap. IV). Există deci un $p \geq 0$ astfel încît $m'^{p+1} \subseteq m$. Punînd $A_r = A + m'^{r+1}$, $r = 0, 1, \dots, p$, avem că A_r este un inel local de ideal maximal m_r , $A_p = A$, $A_0 = A'$ și $m_r^2 \subseteq m_{r+1}$, $r = 0, 1, \dots, p-1$. De asemenea este clar că avem izomorfismele $m_r/m_{r+1} \cong A_r/A_{r+1}$, $r = 0, 1, \dots, p-1$. Fie $m_r^* = 1 + m_r$. Avem de asemenea $m_r^*/m_{r+1}^* \cong A_r^*/A_{r+1}^*$, $r = 0, 1, \dots, p-1$. Definind aplicația $\varphi: m_r \rightarrow m_r^*/m_{r+1}^*$ prin $\varphi(x) = 1+x \bmod m_{r+1}^*$ și observînd că

$$(1+x)(1+y)/(1+x+y) = 1 + (xy/(1+x+y)) \text{ și}$$

$$xy/(1+x+y) \in m_r^2 \subseteq m_{r+1}.$$

rezultă că φ este omomorfism de grupuri. Este clar că φ este surjectiv și $\text{Ker}(\varphi) = m_{r+1}$, de unde izomorfismul $m_r/m_{r+1} \cong m_r^*/m_{r+1}^*$, ceea ce încheie demonstrația lui (3.4.4).

Din discuția de mai sus rezultă că aplicația surjectivă $H^1(O_Z) \rightarrow \prod_{i=1}^n H^1(O_{E_i})$ este un izomorfism dacă și numai dacă aplicația surjectivă $H^1(O_Z^*) \rightarrow \prod_{i=1}^n H^1(O_{E_i}^*)$ este un izomorfism. Combinând această concluzie cu observația că $H^1(O_{E_i}) = 0$ dacă și numai dacă aplicația $\deg: H^1(O_{E_i}^*) \rightarrow \mathbb{Z}$ este un izomorfism, sau încă, dacă și numai dacă E_i este izomorfă cu dreapta proiectivă, demonstrația lemei (3.4) este completă. Q.E.D.

(3.6) COROLAR. În ipotezele lui (3.3), presupunem în plus că $H^1(O_Z) = 0$. Atunci orice O_Z -modul inversibil L astfel încît $\forall i, d_i = \deg_{E_i}(L) \geq 0$, este generat de secțiunile sale globale și $H^1(L) = 0$.

Demonstrație. Fie $x_i, y_i \in E_i$ două puncte distincte pe curba rațională neregulară E_i , care nu se află pe $\bigcup_{j \neq i} E_j, i = 1, \dots, n$. Fie f_i (resp. g_i) un uniformizant local pe E în punctul neregular x_i (resp. y_i), adică un generator al idealului maximal al inelului local O_{E, x_i} (resp. O_{E, y_i}). Fie $\bar{f}_i \in O_{Z, x_i}$ (resp. $\bar{g}_i \in O_{Z, y_i}$) cîte o preimagine a lui f_i (resp. a lui g_i) via omomorfismul surjectiv de nucleu nilpotent $O_{Z, x_i} \rightarrow O_{E, x_i}$ (resp. $O_{Z, y_i} \rightarrow O_{E, y_i}$). Fie de asemenea U_i (resp. V_i) un deschis din $E_i - \bigcup_{j \neq i} E_j$ care conține pe x_i (resp. pe y_i), și în care funcția f_i este regulată (resp. g_i este regulată) și astfel încît f_i (resp. g_i) nu mai are alte zerouri afară de x_i (resp. de y_i). Este clar atunci că

$$\{(U_1, \bar{f}_1^{d_1}), \dots, (U_n, \bar{f}_n^{d_n}), (Z - \{x_1, \dots, x_n\}, 1)\}$$

$$\{(V_1, \bar{g}_1^{d_1}), \dots, (V_n, \bar{g}_n^{d_n}), (Z - \{y_1, \dots, y_n\}, 1)\}$$

definesc doi divizori Cartier D și D' respectiv, a căror restricție la E sînt divizorii $\sum_i d_i x_i$ și $\sum_i d_i y_i$ respectiv. În plus, $\deg_{E_i} O_Z(D) = d_i = \deg_{E_i} O_Z(D')$. După lema (3.4) rezultă că $L \cong O_Z(D) \cong O_Z(D')$. De aici rezultă în mod banal că L este generat de secțiunile sale globale (anume, pentru fiecare punct $z \in Z$ unul din divizorii D sau D' nu trece prin z). Dacă L este generat de secțiunile sale globale există o surjecție $O_Z^{\oplus s} \rightarrow L \rightarrow 0$, care induce omomorfismul surjectiv $H^1(O_Z^{\oplus s}) \rightarrow H^1(L) \rightarrow 0$, și a doua afirmație rezultă deoarece $H^1(O_Z) = 0$ prin ipoteză. Q.E.D.

(3.7) COROLAR. În ipotezele lui (3.6), dacă $Z = \sum_{i=1}^n r_i E_i$, $r_i \geq 1$, atunci

$$\dim H^0(L) = \sum_{i=1}^n r_i d_i + \dim H^0(O_Z).$$

Demonstrație. Ținând cont de definiția numărului de intersecție $(L)_Z = \deg_Z(L)$, avem $\chi(L) = \deg_Z(L) + \chi(O_Z)$, deci (3.6) implică

$$\dim H^0(L) = \deg_Z(L) + \dim H^0(O_Z).$$

În fine faptul că $\deg_Z(L) = \sum_{i=1}^n r_i d_i$ rezultă din (1.11) și (1.12).

Q.E.D.

Înainte de a demonstra criteriul de contractibilitate „rațională” al lui M. Artin avem nevoie de:

(3.8). LEMĂ. Fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism de la suprafața X la suprafața normală (și proiectivă) Y astfel încât există un punct închis $y \in Y$ cu proprietățile: f este izomorfism între $X - f^{-1}(y)$ și $Y - y$ și $f^{-1}(y)$ este o curbă de componente integrale E_1, \dots, E_n (un astfel de morfism f va fi numit în continuare contracție a lui X de-a lungul curbei $E = E_1 + \dots + E_n$). Următoarele afirmații sînt echivalente:

- a) $R^1 f_* (O_X) = 0$.
- b) $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$.
- c) $p_a(Z) \leq 0$ pentru orice divizor pozitiv Z de suport conținut în E .
- d) $H^1(O_Z) = 0$ pentru orice Z ca în condiția c).
- e) Pentru orice $Z > 0$ de suport egal cu E , omomorfismul canonic din (3.4) este un izomorfism.

Demonstrație. Echivalența dintre c), d) și e) a fost demonstrată la (3.3) și (3.4). Rămîne deci de dovedit echivalența dintre a), b) și c). În acest sens, șirul spectral Leray al morfismului f pune în evidență șirul exact (ținînd cont că $f_* O_X = O_Y$ și $R^q f_* O_X = 0$ pentru $q \geq 2$):

$$0 \rightarrow H^1(O_Y) \rightarrow H^1(O_X) \rightarrow H^0(R^1 f_* O_X) \rightarrow H^2(O_Y) \rightarrow H^2(O_X) \rightarrow 0,$$

de unde

$$(3.8.1) \quad \chi(O_Y) - \chi(O_X) = \dim H^0(R^1 f_* O_X) = \dim (R^1 f_* O_X)_y.$$

(Deoarece f este izomorfism în afara lui y , $R^1 f_* O_X$ este concentrat în punctul y .) Atunci (3.8.1) probează în general inegalitatea $\chi(O_Y) \geq \chi(O_X)$, precum și echivalența dintre a) și b).

Pe de altă parte, teorema lui Zariski a funcțiilor olomorfe sub forma dată de Grothendieck (EGA III (4.2.1)) arată că există un izomorfism canonic

$$(3.8.2) \quad (R^1 f_* O_X)_y = \varprojlim_{Z_r} H^1(O_{Z_r}),$$

unde $Z_r = \sum_{i=1}^n r_i E_i$, $r_i > 0$. Ținînd cont că $\dim(Z_r) = 1$, rezultă că dacă $r' = (r'_1, \dots, r'_n) \geq r = (r_1, \dots, r_n)$, atunci omomorfismele naturale $H^1(O_{Z_{r'}}) \rightarrow H^1(O_{Z_r})$ ale sistemului proiectiv de mai sus sînt surjective, de unde rezultă, ținînd cont de (3.8.2), surjecția canonică $(R^1 f_* O_X)_y \rightarrow H^1(O_{Z_r})$ pentru fiecare r . Astfel echivalența dintre a) și c) este dovedită. Q.E.D.

(3.9) TEOREMĂ (M. Artin). Fie X o suprafață (proiectivă și nesingulară) și E o curbă conexă de componente întregi E_1, \dots, E_n pe X . Următoarele afirmații sînt echivalente:

1) Există un morfism $f: X \rightarrow Y$ astfel încît $f(E)$ este un punct normal y pe Y , f este izomorfism între $X - E$ și $Y - y$, iar $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$.

2) Matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este definită negativ și pentru orice divizor pozitiv Z de suport conținut în E , $p_a(Z) \leq 0$.

În plus, dacă 1) sau 2) este îndeplinită și dacă $f_1: X \rightarrow Y_1$ este un alt morfism ce satisface aceleași condiții ca și f , atunci există un unic izomorfism $u: Y \xrightarrow{\sim} Y_1$ astfel încît $u \circ f = f_1$, iar suprafața Y este de asemenea proiectivă.

Demonstrație. Existența izomorfismului u decurge dintr-o afirmație simplă și generală și este lăsată pe seama cititorului.

Implicația 1) \Rightarrow 2) rezultă din (3.8) și (2.7).

2) \Rightarrow 1). Dacă dovedim existența lui $f: X \rightarrow Y$ cu proprietatea că f este contracție a lui X de-a lungul lui E , atunci faptul că $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$, este o consecință a lui (3.8).

Fie G grupul abelian liber de bază E_1, \dots, E_n . Pentru orice divizor $D \in \text{Div}(X)$ obținem omomorfismul $i_D \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$ definit astfel: dacă $z \in G$, atunci $i_D(z) = (z \cdot D)$. În particular, obținem omomorfismul $i: G \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$, $i: D \mapsto i_D$, care este injectiv deoarece matricea lui i în baza E_1, \dots, E_n pentru G și baza duală E_1^*, \dots, E_n^* pentru $G^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G, \mathbb{Z})$ este exact matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$, care este prin ipoteză definită negativ. Cum G și G^* au același rang, Coker(i) este un grup finit. Rezultă că pentru orice divizor $D \in \text{Div}(X)$ există un $m = m_D \geq 1$ astfel încît $m \cdot i_D = i_{mD} = -i_Z$ cu $Z \in G$ convenabil.

Fie acum H o secțiune hiperplană pe X astfel încît $H^q(O_X(H)) = 0$ pentru orice $q \geq 1$. Înlocuind pe H cu un multiplu convenabil

al său, putem presupune în plus că $i_H = -i_Z$ (conform celor spuse mai sus), cu $Z \in G$. Deoarece $(H \cdot E_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$, rezultă $(Z \cdot E_i) < 0$ pentru orice i . Atunci Z rezultă un divizor strict pozitiv ce majorează pe $E = E_1 + \dots + E_n$. Într-adevăr, punind $Z = Z_1 - Z_2$, cu $Z_1, Z_2 \geq 0$ și fără componente comune, obținem $0 \geq (Z \cdot Z_2) = (Z_1 \cdot Z_2) - (Z_2^2)$. Cum $(Z_1 \cdot Z_2) \geq 0$ și $-(Z_2^2) \geq 0$, rezultă $(Z_2^2) = 0$, deci $Z_2 = 0$ deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, deci $Z \geq 0$. Deoarece $(Z \cdot E_i) < 0$, Z trebuie să conțină pe E_i drept componentă, deci $Z \geq E_i$.

Avem atunci $i_{H+Z} = 0$, adică $(H + Z \cdot E_i) = 0$ pentru orice i . Punind $L = O_X(H + Z) \otimes O_Z$, obținem un O_Z -modul inversibil cu proprietatea $\deg_{E_i}(L/E_i) = (L \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , deci din (3.3) și (3.4) rezultă $L \cong O_Z$ (acesta este punctul cheie al demonstrației!). Obținem șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(H) \rightarrow O_X(H + Z) \rightarrow O_Z \rightarrow 0$$

care arată, ținând cont că $H^1(O_X(H)) = 0$, surjectivitatea omomorfismului canonic de restricție $H^0(O_X(H + Z)) \rightarrow H^0(O_Z)$. Există deci o secțiune $s \in H^0(O_X(H + Z))$ a cărei restricție la Z este 1, deci un divizor $D \in |H + Z|$ cu proprietatea $D \cap E = \emptyset$. Deoarece H este o secțiune hiperplană rezultă: a) sistemul linear complet $|H + Z|$ nu are nici puncte bază nici componente fixe, b) $|H + Z|$ separă punctele și direcțiile din $X - E$. În plus, faptul că $(H + Z \cdot E_i) = 0$ pentru orice i implică că morfismul $f' : X \rightarrow P(H^0(O_X(H + Z))) = |H + Z|$ contractă curba E la un punct $f'(E) = y'$, iar pe de altă parte, f' este izomorfism între $X - E$ și $f'(X) - y'$. Înlocuind eventual $f'(X)$ cu normalizata sa Y (care este varietate proiectivă deoarece $f'(X)$ are această proprietate) și f' cu morfismul $f : X \rightarrow Y$ dedus din proprietatea de universalitate a normalizatei, obținem contracția dorită. Q.E.D.

(3.10) COROLAR. Fie X o suprafață și E o curbă conexă ce satisface condiția 2) din (3.9). Fie D un divizor pe X astfel încât $(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$. Atunci există un divizor D_1 linear echivalent cu D astfel încât $\text{Supp}(D_1) \cap E = \emptyset$.

Demonstrație. Punându-ne de acord cu notațiile din demonstrația lui (3.9), fie H o secțiune hiperplană astfel încât $H^q(O_X(H)) = H^q(O_X(H + D)) = 0$ pentru orice $q \geq 1$, $i_H = -i_Z$, cu $Z \geq E$ un divizor din G . Din ipoteze rezultă de asemenea $i_{H+D} = -i_Z$. La fel ca în demonstrația lui (3.9) deducem existența a doi divizori $D' \in |H + Z|$ și $D'' \in |H + Z + D|$ astfel încât $D' \cap E = D'' \cap E = \emptyset$. Punind $D_1 = D'' - D'$, avem $D_1 \sim D$ și $\text{Supp}(D_1) \cap E = \emptyset$. Q.E.D.

(3.11) Facem acum o mică digresiune pentru a aminti pe scurt definiția și proprietățile mai importante ale fascicului dualizant

ω_Z al lui Grothendieck asociat unei k -scheme algebrice Z de dimensiune pură $n \geq 1$. Pentru detalii se poate consulta Altman-Kleiman [1]. Pentru aceasta se scufundă Z într-o varietate neregulară P de dimensiune să zicem $m \geq n$ ca subschemă închisă, și atunci punem prin definiție

$$\omega_Z = \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_P}^{m-n}(\mathcal{O}_Z, \Omega_{P/k}^m),$$

unde $\Omega_{P/k}^m$ este fasciculul de germeni de forme diferențiale de grad m pe P . Iată o listă de proprietăți ale lui ω_Z ce vor fi folosite în continuare :

(3.11.1) ω_Z este un \mathcal{O}_Z -modul coerent ce depinde doar de Z , nu și de scufundarea $Z \subset P$.

(3.11.2) ω_Z coincide în jurul punctelor neregulare ale lui Z cu fasciculul $\Omega_{Z/k}^n$.

(3.11.3) Dacă Z este o schemă proiectivă și Cohen-Macaulay, atunci pentru orice \mathcal{O}_Z -modul F local liber de rang finit, există o acuplare neregulară

$$H^p(Z, F) \times H^{n-p}(Z, \check{F} \otimes \omega_Z) \rightarrow k,$$

cu \check{F} dualul lui F , ce pune în dualitate algebrică spațiile vectoriale de mai sus (dualitatea Grothendieck-Serre).

(3.11.4) Dacă Z este Cohen-Macaulay, atunci ω_Z este un fascicul inversibil în jurul punctului $z \in Z$ dacă și numai dacă inelul local $\mathcal{O}_{Z,z}$ este inel Gorenstein.

(3.11.5) Dacă D este un divizor Cartier efectiv pe Z , atunci are loc formula de adjuncție :

$$\omega_D \cong \omega_Z \otimes \mathcal{O}_Z(D) \otimes \mathcal{O}_D.$$

În particular, dacă Z este o suprafață normală și proiectivă, Z este totdeauna Cohen-Macaulay și deci ω_Z are toate proprietățile de mai sus.

(3.12) LEMĂ. Fie A un inel local noetherian de dimensiune n , cât al inelului local regulat B de dimensiune $n + r$, și fie I un ideal al lui A ($I \neq A$) astfel încât $I\text{-prof}(A) \geq 2$ (adică I conține un A -șir f_1, f_2 de lungime 2). Dacă punem $\Omega_A = \text{Ext}_B^r(A, B)$, atunci $I\text{-prof}(\Omega_A) \geq 2$.

Demonstrație. Fie $f_1, f_2 \in I$ un A -șir. Vom arăta că f_1, f_2 este de asemenea un Ω_A -șir. Fie pentru aceasta șirul exact

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f_1} A \rightarrow A/f_1A \rightarrow 0.$$

în care prima săgeată este multiplicarea cu f_1 . Obținem șirul exact al Ext'urilor :

$$\text{Ext}_B^r(A/f_1A, B) \rightarrow \Omega_A \xrightarrow{f_1} \Omega_A \rightarrow \text{Ext}_B^{r+1}(A/f_1A, B) = \Omega_{A/f_1A}.$$

Deoarece $r < \dim(B) - \dim(A/f_1A) = r+1$, $\text{Ext}_B^r(A/f_1A, B) = 0$ (a se vedea de exemplu Altman-Kleiman [1], pag. 50), de unde rezultă că f_1 nu este divizor al lui zero în Ω_A , și în plus, $\Omega_A/f_1\Omega_A$ este un A -submodul al lui Ω_{A/f_1A} . Deoarece f_2 nu este divizor al lui zero în A/f_1A , același argument arată că f_2 nu este divizor al lui zero în Ω_{A/f_1A} , și *a fortiori*, în submodulul $\Omega_A/f_1\Omega_A$. Q.E.D.

(3.13) COROLAR. Fie A un inel local Cohen-Macaulay de dimensiune n , cât al inelului local regulat B de dimensiune $n+r$, și fie I un ideal al lui A ($I \neq A$), astfel încât $I\text{-prof}(A) \geq 2$ (de exemplu A normal, de dimensiune ≥ 2 și I idealul maximal al lui A). Punând $X = \text{Spec}(A)$, $Y = V(I)$, $U = X - Y$ și $\omega_X = (\text{Ext}_B^r(A, B))^\sim$, următoarele condiții sînt echivalente :

- i) A este inel Gorenstein.
- ii) $\omega_X/U \cong O_X/U$.

Demonstrație. Dacă A este inel Gorenstein, $\Omega_A \cong A$, deci $\omega_X \cong O_X$ și deci condiția ii). Reciproc, presupunînd ii), avem, după (3.12), că $I\text{-prof}(\Omega_A) \geq 2$, deci fasciculele $\mathcal{H}_Y^0(\omega_X)$ și $\mathcal{H}_Y^1(\omega_X)$ de coomologie locală se anulează (cf. Grothendieck [4], teorema 3.8). Însă aceste două fascicule reprezintă nucleul și conucleul aplicației canonice $\omega_X \rightarrow i_*(\omega_X/U)$, deci $\omega_X \cong i_*(\omega_X/U) \cong i_*(O_X/U) \cong O_X$, deoarece $I\text{-prof}(A) \geq 2$ prin ipoteză, unde prin i am notat imersia $U \hookrightarrow X$. Q.E.D.

(3.14) COROLAR. (Murthy). Fie A un inel local Cohen-Macaulay, factorial și care este cât de inel local regulat. Atunci A este inel Gorenstein.

Demonstrație. Dacă $\dim(A) = 0$, afirmația este banală, iar dacă $\dim(A) = 1$, A factorial, implică A de valoare discretă, deci Gorenstein. Presupunem deci $\dim(A) \geq 2$ și vom demonstra (3.14) prin inducție după $\dim(A)$. Punînd $U = X - \{m\}$, unde $X = \text{Spec}(A)$ și m este idealul maximal al lui A , atunci orice O_U -modul inversibil este liber. Într-adevăr, fiecare astfel de O_U -modul se poate

extinde, ținând cont de factorialitatea lui A , la un O_X -modul inversibil, care este liber deoarece A este inel local. Deoarece $\dim(U) < \dim(A)$, putem presupune prin ipoteza de inducție că U este o schemă Gorenstein, deci ω_X/U este inversibil, și deci liber după afirmația precedentă. (3.14) rezultă acum din (3.13). Q.E.D.

Cu aceste pregătiri trecem acum la demonstrarea următorului caz special remarcabil al teoremei (3.9):

(3.15) TEOREMĂ. (M. Artin). Fie X o suprafață (proiectivă și nesesingulară) și E o curbă conexă de componente întregi E_1, \dots, E_n . Următoarele afirmații sînt echivalente:

1) Există un morfism $f: X \rightarrow Y$ cu proprietățile: $f(E) = y$ este un punct normal Gorenstein pe Y , f este izomorfism între $X - E$ și $Y - y$ și $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$.

2) Matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, E_i sînt curbe raționale nesesingulare și $(E_i^2) = -2$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Demonstrație. 1) \Rightarrow 2). Avem doar de arătat că $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$. Deoarece ω_Y este inversibil și $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$, avem $(\omega_X \cdot E_i) = 0$. Cum $(E_i^2) < 0$ (cf. (2.7)), din formula de adjuncție rezultă imediat $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$.

2) \Rightarrow 1). Fie $Z > 0$ un divizor pozitiv de suport conținut în E . Atunci $(\omega_X \cdot E_i) = -2 - (E_i^2) - 2p_a(E_i) = 0$ pentru orice i , deci $(\omega_X \cdot Z) = 0$. Rezultă că

$$p_a(Z) = 1/2(Z^2) + 1/2(\omega_X \cdot Z) + 1 = 1/2(Z^2) + 1 \leq 0$$

deoarece $(Z^2) < 0$, matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ fiind definită negativ. Deci condiția 2) a teoremei (3.9) este satisfăcută; în baza acestei teoreme există o contracție $f: X \rightarrow Y$ cu proprietatea $\chi(O_X) = \chi(O_Y)$. Rămîne de demonstrat că ω_Y este inversibil și că $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$.

Deoarece $(\omega_X \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , există, conform lui (3.10), o formă diferențială ω de grad doi pe X al cărei divizor, $\text{div}_X(\omega)$, să aibă suportul disjunct de E . Altfel spus, există un deschis afin U pe Y ce conține pe y astfel încît $\Omega_{X/k}^2/f^{-1}(U) \cong O_X/f^{-1}(U)$, de unde rezultă că $\Omega_{Y/k}^2/U - y \cong O_Y/U - y$. După (3.13) rezultă că y este un punct Gorenstein pe Y , deci ω_Y este inversibil. Ținînd cont că în U avem $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$ și că f este un izomorfism în afara lui y , avem $f^*(\omega_Y) \cong \omega_X$. Q.E.D.

(3.16) DEFINIȚIE. Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeței algebrice Y (deci (Y, y) este singularitate izolată). Se numește desingularizare a lui (Y, y) un morfism $f: X \rightarrow Y$ astfel încît X este nesesingulară în jurul lui $f^{-1}(y)$ și f este un izomorfism între $X - f^{-1}(y)$ și $Y - y$.

După o teoremă a lui Zariski-Abhyankar (a se vedea Zariski [4], [5] și Abhyankar [1]), există întotdeauna o astfel de desingularizare a unei singularități normale de dimensiune 2 peste un corp algebric închis, de caracteristică arbitrară. Când dorim să studiem o asemenea singularitate (Y, y) , putem evident presupune — dacă este nevoie — că Y este suprafață normală afină și neregulară în afara lui y (și atunci desingularizata X rezultă neregulară în orice punct).

(3.17) DEFINIȚIE. O singularitate normală (Y, y) a unei suprafețe Y se numește *rațională* dacă există o desingularizare $f: X \rightarrow Y$ a lui (Y, y) astfel încât $R^1f_*O_X = 0$.

Ținând cont de structura aplicațiilor birationale între două suprafețe neregulare (ca fiind produs de transformări pătratică sau de inverse de acestea), precum și de faptul că, dată fiind o transformare pătratică $u: X' \rightarrow X$ a suprafeței neregulare X , atunci $R^1u_*O_{X'} = 0$, rezultă imediat că definiția (3.17) este independentă de alegerea desingularizării $f: X \rightarrow Y$ în sensul că dacă $R^1f_*O_X = 0$, atunci orice altă desingularizare \tilde{f} a lui (Y, y) are aceeași proprietate.

Lema (3.8) dă condiții echivalente cu faptul că (Y, y) este singularitate rațională, unde f este o desingularizare a lui (Y, y) și $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ este fibra redusă a lui f . Într-adevăr, dacă y nu este punct simplu pe Y , atunci din teorema de conexiune a lui Zariski (cf. EGA III 4.3.1) rezultă că E este o mulțime conexă având toate componentele ireductibile E_1, \dots, E_n de dimensiune 1. Corolarul (2.7) arată că matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ. De aici rezultă că, pentru orice sistem a_1, \dots, a_n de numere întregi, există un unic $Z \in G$ (G fiind ca și în demonstrația lui (3.9) grupul abelian liber de bază E_1, \dots, E_n), astfel încât $(Z \cdot E_i) = da_i$, cu $d = \det \|(E_i \cdot E_j)\|$. În particular, există divizori $Z \in G$ astfel încât $(Z \cdot E_i) \leq 0$ pentru orice i . Un astfel de divizor nenul este în mod necesar \geq decât $E = E_1 + \dots + E_n$ (a se vedea demonstrația teoremei (3.9)).

(3.18) LEMĂ. În ipotezele și notațiile de mai sus, există un cel mai mic divizor $Z > 0$, de suport egal cu E , astfel încât $(Z \cdot E_i) \leq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Demonstrație. Fie $Z^1 = \sum_{i=1}^n r_i^1 E_i > 0$, $Z^2 = \sum_{i=1}^n r_i^2 E_i > 0$ astfel încât $(Z^1 \cdot E_i) \leq 0$, $(Z^2 \cdot E_i) \leq 0$ pentru orice i , și fie $Z' = \inf(Z^1, Z^2) = \sum_{i=1}^n r'_i E_i$, cu $r'_i = \inf(r_i^1, r_i^2)$. Cum $r_i^1 \geq 1$, $r_i^2 \geq 1$, rezultă $r'_i \geq 1$. Pe

de altă parte, dacă de exemplu pentru un i $r_i^1 \leq r_i^2$, avem $(Z' \cdot E_i) = r_i^1(E_i^2) + \sum_{j \neq i} r_j^1(E_i \cdot E_j) \leq r_i^1(E_i^2) + \sum_{j \neq i} r_j^1(E_i \cdot E_j) = (Z^1 \cdot E_i) \leq 0$. Q.E.D.

(3.19) *Observație.* Demonstrația existenței celui mai mic $Z \geq E$ astfel încît $(Z \cdot E_i) \leq 0$ pentru orice i nu a folosit faptul că morfismul $f: X \rightarrow Y$ există, ci numai darea curbei E pe X de componente E_1, \dots, E_n avînd matricea de intersecție definită negativ.

(3.20) *DEFINIȚIE.* În contextul lemei (3.18), cel mai mic ciclu (pozitiv) Z cu proprietatea $(Z \cdot E_i) \leq 0$, $i = 1, \dots, n$, poartă numele de *ciclu fundamental* al lui E .

(3.21) *TEOREMĂ.* (M. Artin). Fie $f: X \rightarrow Y$ o desingularizare a singularității normale (Y, y) de dimensiune 2. $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ și Z ciclu fundamental al lui E . Atunci $p_a(Z) \geq 0$ și în plus, $p_a(Z) = 0$ dacă și numai dacă (Y, y) este singularitate rațională.

Demonstrație. Fie $Z' > 0$ ($Z' \in G$) cu $Z' \not\geq Z$. Atunci există un indice i astfel încît $(Z' \cdot E_i) > 0$ (ținînd cont de definiția lui Z). Atunci $p_a(Z' + E_i) = p_a(Z') + p_a(E_i) + (Z' \cdot E_i) - 1 \geq p_a(Z')$, deoarece $p_a(E_i) \geq 0$. Deci

$$(3.21.1) \quad p_a(Z' + E_i) \geq p_a(Z') \text{ dacă } Z' \not\geq Z \text{ și } (Z' \cdot E_i) > 0.$$

Presupunem acum că $0 < Z' < Z$ și $(Z' \cdot E_i) > 0$. Atunci în mod necesar multiplicitatea cu care apare E_i în Z' este strict mai mică decît cea cu care apare E_i în Z , deci $Z' + E_i \leq Z$. Demonstrația inegalității $p_a(Z) \geq 0$ se face acum inductiv, observînd că $p_a(E_i) \geq 0$ și ținînd cont de (3.21.1).

Presupunem acum că $p_a(Z) = 0$. Fie Z_1 un divizor pozitiv din G . Definim prin inducție șirul $\{Z_m\}$ după cum urmează:

i) dacă $Z_m \geq Z$, atunci punem $Z_{m+1} = Z_m - Z \geq 0$.

ii) dacă $Z_m \not\geq Z$, fie i un indice astfel încît $(Z_m \cdot E_i) > 0$. Alegem pe acel i cu proprietatea că $(Z_m \cdot E_i) > 0$ și care apare cu multiplicitatea cea mai mică în Z_m și atunci punem $Z_{m+1} = Z_m + E_i$.

Procedeul se oprește cînd $Z_m = 0$. În cazul i) avem $p_a(Z_m) = p_a(Z_{m+1} + Z) = p_a(Z_{m+1}) + p_a(Z) + (Z \cdot Z_{m+1}) - 1 = p_a(Z_{m+1}) + (Z \cdot Z_{m+1}) - 1 \leq p_a(Z_{m+1}) - 1$ (deoarece $(Z \cdot Z_{m+1}) \leq 0$), deci în cazul i) obținem:

$$(3.21.2) \quad p_a(Z_{m+1}) > p_a(Z_m).$$

În cazul ii), inegalitatea (3.21.1) arată că $p_a(Z_{m+1}) \geq p_a(Z_m)$.

Observăm acum că deoarece $(E_i^2) < 0$, situația ii) nu se poate repeta la infinit fără a apare și situația i). Pe de altă parte, observăm

(inducție) că dacă $Z' = \sum_{i=1}^n s_i E_i$, atunci $p_a(Z')$ se poate exprima ca o funcție polinomială de grad doi în s_1, \dots, s_n , în care partea omogenă de grad doi este $1/2 \sum_{i,j} s_i s_j (E_i \cdot E_j)$. Deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, rezultă că mulțimea de întregi $\{p_a(Z') \mid Z' \in G, Z' > 0\}$ este mărginită superior. De aici rezultă, ținând cont de cele spuse mai înainte și de (3.21.2), că procedeul de mai sus se sfârșește cu siguranță după un număr finit de pași, altfel spus există un $m \geq 1$ astfel încât $Z_{m+1} = 0$. Atunci $Z_m = Z$ și deci $p_a(Z_1) \leq p_a(Z) = 0$. Teorema (3.21) este demonstrată. Q.E.D.

(3.22) Fie X o suprafață și $I \subset O_X$ un fascicul coerent de ideale. Definim fasciculul

$$I^{-1}(U) = \{a \in k(X) \mid a \cdot I(U) \subseteq O_X(U)\},$$

care este un subfascicul coerent al fasciculului constant $k(X)$ al tuturor funcțiilor raționale pe X . Fasciculul $(I^{-1})^{-1}$ (definit în mod similar, deoarece $I^{-1} \subset k(X)$) conține pe I și este fascicul de ideale. I se numește ideal divizorial dacă $I = (I^{-1})^{-1}$. După Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. VII, I este divizorial dacă și numai dacă fiecare componentă primară a idealului $I_x \subset O_{X,x}$ (cu x punct arbitrar al lui X) are idealul prim asociat de înălțime 1. Cum X este neregulară, aceasta revine la faptul că I este local dat de o singură ecuație, deci la faptul că I este inversibil.

(3.23) LEMĂ. Fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism de la suprafața neregulară X la suprafața normală și afină $Y = \text{Spec}(A)$, și fie E o curbă conexă de componente integrale E_1, \dots, E_n . Presupunem că $f(E)$ este un punct pe Y , f este izomorfism între $X - E$ și $Y - y$ și că $R^1 f_* O_X = H^1(O_X) = 0$. Dacă m este idealul maximal în A corespunzător punctului $y = f(E)$, atunci idealul mO_X este inversibil.

Demonstrație. După (3.22) este suficient să arătăm că idealul $I' = (I^{-1})^{-1}$ coincide cu $I = mO_X$. Considerăm O_X -modul coerent I'/I al cărui suport nu poate conține decât cel mult puncte închise și deci $\text{Supp}(I'/I)$ este cel mult finit. În particular, $H^1(X, I'/I) = 0$. În șirul exact

$$(3.23.1) \quad 0 \rightarrow \Gamma(I'/I) \rightarrow \Gamma(O_X/I) \rightarrow \Gamma(O_X/I') \rightarrow H^1(I'/I) = 0$$

avem $\Gamma(O_X/I) = k$. Într-adevăr, deoarece $I = mO_X$ există un șir exact de forma $0 \rightarrow K \rightarrow O_X^m \rightarrow I \rightarrow 0$, de unde rezultă șirul exact:

$$0 = H^1(O_X^m) \rightarrow H^1(I) \rightarrow H^2(K) = 0.$$

și deci $\Gamma(O_X/I) = \Gamma(O_X)/\Gamma(I)$. Însă $m \subseteq \Gamma(I) \subsetneq \Gamma(O_X) = A$, de unde $\Gamma(O_X/I) = A/m = k$.

Din (3.23.1) rezultă atunci $\Gamma(I'/I) = 0$ sau $\Gamma(O_X/I') = 0$. Însă deoarece f nu este izomorfism, $\dim \text{Supp}(O_X/I) = 1$, $I' \neq O_X$, altfel spus $\Gamma(O_X/I') \neq 0$, și deci $\Gamma(I'/I) = 0$. Cum am observat că I'/I are suportul cel mult finit, rezultă $I' = I$. Q.E.D.

(3.24) LEMĂ. În ipotezele lui (3.23), presupunem în plus că $A = O_{X,v}$. Atunci pentru orice O_X -modul inversibil L avem:

- i) $(L \cdot E_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, implică $L \cong O_X$.
- ii) $(L \cdot E_i) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, implică L este generat de secțiunile sale globale și $H^1(L) = 0$.

Demonstrație. Vom folosi observația următoare: $H^1(L) = 0$ dacă și numai dacă $H^1(L \otimes O_Z) = 0$ pentru orice divizor pozitiv Z de suport conținut în E . Într-adevăr, o implicație rezultă imediat folosind faptul că $H^2 = 0$ pentru orice O_X -modul coerent, iar cealaltă cu ajutorul teoremei lui Zariski a funcțiilor olomorfe (a se vedea demonstrația lui (3.8)).

Vom proba mai întâi ii). Fie $x \in X$ un punct închis. Atunci $x \in E$. Avem de arătat că L are o secțiune globală ce nu se anulează în x . După (3.8), $H^1(O_Z) = 0$ pentru orice $Z > 0$ cu $\text{Supp}(Z) \subseteq E$, deci dacă punem $L_Z = L \otimes O_Z$, atunci L_Z este generat de secțiunile sale globale deoarece $\deg_{E_i}(L_Z/E_i) = (L \cdot E_i) \geq 0$ și se aplică (3.6). Cum în mod evident $(mO_X)_Z = mO_X \otimes O_Z$ este generat de secțiunile sale globale și, după (3.23), inversibil, rezultă că $(L \otimes mO_X)_Z$ este un O_Z -modul inversibil generat de secțiunile sale globale. După (3.6) deducem atunci $H^1((L \otimes mO_X)_Z) = 0$. Cum Z este arbitrar, observația de la început arată că $H^1(L \otimes mO_X) = 0$. Șirul exact de coomologie

$$H^0(L) \rightarrow H^0(L \otimes (O_X/mO_X)) \rightarrow H^1(L \otimes mO_X) = 0$$

arată că prima săgeată este surjectivă. Fie acum Z' curba definită de idealul inversibil mO_X . Atunci, deoarece $L \otimes (O_X/mO_X) = L_{Z'}$ este generat de secțiunile sale globale și $x \in Z'$, rezultă că există o secțiune $s' \in H^0(L \otimes O_{Z'})$ astfel încât $s'(x) \neq 0$. Cum s' se ridică la o secțiune $s \in H^0(L)$, L este generat de secțiunile sale globale deoarece avem de asemenea $s(x) \neq 0$. Faptul că $H^1(L) = 0$ rezultă imediat și deci ii) este dovedit.

Cu toate că i) este esențialmente conținut în (3.10), se mai poate totuși da și următorul argument. Cu aceleași argumente ca mai sus se arată că în ipotezele lui i) există $s' \in H^0(L_{Z'})$ cu proprietatea că

nu se anulează nicăieri (cf. 3.4)). De aici rezultă că s nu se anulează în nici-un punct al lui Z , deci în nici-un punct al lui X , deoarece A este inel local. Q.E.D.

(3.25) LEMĂ. În ipotezele lemei (3.24), pentru orice $p \geq 1$, aplicația canonică $m^p \rightarrow \Gamma(m^p O_X)$ este un izomorfism.

Demonstrație. Folosind inducție după p (cazul $p = 1$ fiind banal și deja observat în demonstrația lui (3.23)), totul revine la a arăta că aplicația naturală ($p \geq 2$)

$$(3.25.1) \quad \Gamma(m^{p-1} O_X) \otimes \Gamma(m O_X) \rightarrow \Gamma(m^p O_X)$$

este surjectivă. Cum această aplicație se factorizează în

$$(3.25.2) \quad \Gamma(m^{p-1} O_X) \otimes \Gamma(m O_X) \xrightarrow{v} \Gamma(m^{p-1} O_X \otimes m O_X) \rightarrow \Gamma(m^p O_X).$$

și cum $m^i O_X$ este inversibil pentru orice i (cf. (3.23)), a doua săgeată este un izomorfism, deci totul revine la a proba surjectivitatea lui v . Fie pentru aceasta

$$0 \rightarrow K_1 \rightarrow O_X^s \xrightarrow{u_1} m^{p-1} O_X \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow K_2 \rightarrow O_X^t \xrightarrow{u_2} m O_X \rightarrow 0$$

două șiruri exacte (a căror existență este clară) care induc șirurile exacte de coomologie

$$\Gamma(O_X^s) \xrightarrow{\alpha_1} \Gamma(m^{p-1} O_X) \rightarrow H^1(K_1) \rightarrow H^1(O_X^s) = 0,$$

$$\Gamma(O_X^t) \xrightarrow{\alpha_2} \Gamma(m O_X) \rightarrow H^1(K_2) \rightarrow H^1(O_X^t) = 0$$

în care α_1 și α_2 pot fi alese surjective. Rezultă $H^1(K_1) = H^1(K_2) = 0$. Fie $N = \text{Ker}(u_1 \otimes u_2)$. Șirul exact

$$K = (K_1 \otimes O_X^s) \oplus (K_2 \otimes O_X^t) \rightarrow O_X^s \otimes O_X^t \rightarrow m^{p-1} O_X \otimes m O_X \rightarrow 0$$

arată că avem șirul exact

$$0 \rightarrow M \rightarrow K \rightarrow N \rightarrow 0.$$

Cum $H^1(K) = 0$ și $H^2(M) = 0$ (fibrelor lui f sînt de dimensiune ≤ 1), atunci $H^1(N) = 0$, deci aplicația naturală $\Gamma(u_1 \otimes u_2)$:

$\Gamma(O_X^s \otimes O_X^t) \rightarrow \Gamma(m^{p-1}O_X \otimes mO_X)$ este surjectivă. Considerînd diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(O_X^s) \otimes \Gamma(O_X^t) & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(O_X^s \otimes O_X^t) \\ \alpha_1 \otimes \alpha_2 \downarrow & & \downarrow \Gamma(u_1 \otimes u_2) \\ \Gamma(m^{p-1}O_X) \otimes \Gamma(mO_X) & \xrightarrow{v} & \Gamma(m^{p-1}O_X \otimes mO_X) \end{array}$$

arată că v este surjectiv. Q.E.D.

(3.26) *Observație.* Lema (3.25) probează de fapt că toate puterile lui m sînt — în terminologia din Lipman [1] — complete, și deci (*loc. cit.*) dacă (Y, y) este o singularitate rațională, atunci transformata pătratică a lui Y de centru y este normală. Acest fapt combinat cu o observație simplă (anume că singularitățile ce pot apărea pe transformata pătratică a lui Y de centru y sînt tot singularități raționale) arată că orice singularitate rațională se poate desingulariza numai cu ajutorul transformărilor pătratice, ne mai fiind necesare normalizări. O singularitate cu această ultimă proprietate se mai numește singularitate absolut izolată.

(3.27) *LEMĂ.* Fie (Y, y) o singularitate normală de dimensiune $r > 1$ și fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism birațional astfel încît $L = mO_X$ să fie inversibil. Presupunînd că Y este varietate completă, atunci multiplicitatea inelului local $O_{X,y}$ coincide cu $-(L^r)_X = (-1)^{r-1} \cdot (D^r)$, unde D este divizorul efectiv definit de idealul L .

Demonstrație. Fie $\sigma: X_1 \rightarrow Y$ transformarea pătratică a lui Y de centru y și $L_1 = O_{X_1}(1) = mO_{X_1}$. Din proprietatea de universalitate a lui σ , rezultă că există un unic morfism astfel încît $\sigma \circ u = f$ și $u^*(L_1) \cong L$. Deoarece u este birațional, din (1.18) rezultă că $(L_1^r)_{X_1} = (L^r)_X$, deci va fi suficient să dovedim afirmația din lema în cazul cînd $f = \sigma$. Însă atunci $X = \text{Proj} \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} m^i \right)$, iar din șirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* O_X(n)) \Rightarrow H^{p+q}(X, O_X(n)) = H^{p+q}(X, L^n)$$

rezultă că $E_2^{pq} = 0$ pentru orice $q > 0$ și $n \geq 0$ (EGA III 2.2.1). Deci $H^p(Y, f_* O_X(n)) = H^p(X, L^n)$ pentru orice $p \geq 0$ și $n \geq 0$. Însă cum $f_* O_X(n) = m^n$ dacă $n \geq 0$, obținem pentru orice $p \geq 0$ și $n \geq 0$, izomorfismele $H^p(Y, m^n) \cong H^p(X, L^n)$, de unde egalitatea $\chi(Y, m^n) = \chi(X, L^n)$ cu $n \geq 0$. Fie $P(n) = \chi(X, L^n)$. După (1.1) și (1.21) $P(n)$ este un polinom de forma $P(n) = a/r! n^r + \dots$, cu $a =$

$= (L^r)$. Atunci funcția diferență are forma $\Delta P(n) = a/(r-1)! \cdot n^{r-1} + \dots$, iar pe de altă parte

$$\Delta P(n) = \Delta \chi(Y, m^n) = -\dim_k(m^n/m^{n+1})$$

(folosind șirul exact $0 \rightarrow m^{n+1} \rightarrow m^n \rightarrow m^n/m^{n+1} \rightarrow 0$ și aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré). Q.E.D.

Sintem acum în măsură să demonstrăm următorul rezultat important :

(3.28) TEOREMĂ. (M. Artin). Fie (Y, y) o singularitate normală de dimensiune 2 și $f: X \rightarrow Y$ o desingularizare a lui (Y, y) . Dacă (Y, y) este singularitate rațională și Z este ciclul fundamental al fibrei $E = f^{-1}(y)_{\text{red}} = E_1 + \dots + E_n$, iar m este idealul maximal al inelului local $O_{Y,y}$, atunci $X \times_Y \text{Spec}(O_{Y,y}/m^n) = nZ$, $H^0(O_{nZ}) \cong \cong O_{Y,y}/m^n$ și $\dim_k(m^n/m^{n+1}) = -n \cdot (Z^2) + 1$, pentru orice $n \geq 1$.

Demonstrație. Este clar că putem presupune $Y = \text{Spec}(A)$, cu $A = O_{Y,y}$, deoarece, cu toate că $X = f^{-1}(\text{Spec}(O_{Y,y}))$ nu mai este suprafață proiectivă, autointersecția divizorului Z de pe X are sens fiindcă Z este curbă proiectivă. Prima afirmație este atunci echivalentă cu egalitatea $m^n O_X = O_X(-nZ)$ pentru orice $n \geq 1$. Este însă clar că este suficient să dovedim că $mO_X = O_X(-Z)$. Fie $g \in m$, $g \neq 0$. Atunci

$$\text{div}_X(g) = D + Z',$$

cu Z' divizor strict pozitiv de suport E , iar D divizor pozitiv ce nu conține nici-o componentă E_i . Deoarece E_i sînt curbe proiective, avem

$$(\text{div}_X(g) \cdot E_i) = 0 \text{ pentru orice } i,$$

și deci $(Z' \cdot E_i) = -(D \cdot E_i) \leq 0$ pentru orice i . Ținînd cont de definiția ciclului fundamental, rezultă $Z' \geq Z$. Altfel spus, $mO_X \subseteq \subseteq O_X(-Z)$.

Pentru a dovedi că $O_X(-Z) = mO_X$ va fi suficient să arătăm că pentru orice punct $P \in Z$ există o funcție $g \in m$ al cărei divizor să fie egal în jurul lui P cu Z . În acest scop observăm că $L = = O_X(-Z)$ are proprietatea $(L \cdot E_i) = -(Z \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i , deci după (3.24) L este generat de secțiunile sale globale. Există deci un divizor pozitiv $D \in |L|$ care nu trece prin P . Din izomorfismul $O_X(-Z) \cong O_X(D)$ deducem $O_X(Z + D) \cong O_X$, deci există un $g \in Q(A)$ (corpul fracțiilor lui A) astfel încît $\text{div}_X(g) = Z + D$. Cum $Z > > 0$ și $D > 0$, $g \in m$, și prima afirmație a teoremei este demonstrată

Considerăm acum diagrama comutativă cu liniile exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & m^n & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A/m^n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & H^0(m^n O_X) & \longrightarrow & H^0(O_X) & \longrightarrow & H^0(O_{nz}) \longrightarrow H^1(m^n O_X)
 \end{array}$$

Însă după (3.24), $H^1(m^n O_X) = H^1(O_X(-nZ)) = 0$ (am ținut cont și de prima afirmație a teoremei), deoarece $(-nZ \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i , ceea ce demonstrează a doua egalitate din enunț, primele două săgeți verticale fiind izomorfisme.

În fine, din șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(-nZ) \otimes O_Z \rightarrow O_{(n+1)Z} \rightarrow O_{nz} \rightarrow 0$$

deducem șirul exact de coomologie

$$0 \rightarrow H^0(O_X(-nZ) \otimes O_Z) \rightarrow H^0(O_{(n+1)Z}) \rightarrow H^0(O_{nz}) \rightarrow H^1(O_X(-nZ) \otimes O_Z)$$

în care ultimul grup de coomologie este trivial deoarece $(-nZ \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i și se aplică (3.6). Deci, ținând cont că $H^0(O_{(n+1)Z}) = A/m^{n+1}$, $H^0(O_{nz}) = A/m^n$, rezultă că

$$\begin{aligned}
 \dim m^n/m^{n+1} &= \dim H^0(O_X(-nZ) \otimes O_Z) = (\text{după (3.7)}) \\
 &= - \sum_i n r_i(Z \cdot E_i) + \dim H^0(O_Z) = -n \cdot (Z^2) + 1. \text{ Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

(3.29) COROLAR. În ipotezele teoremei (3.28), dimensiunea spațiului tangent al lui Zariski $T_{Y,y}$ al singularității (Y, y) coincide cu $-(Z^2) + 1$, iar multiplicitatea lui $O_{Y,y}$ cu $-(Z^2)$.

(3.30) TEOREMĂ. (Castelnuovo). Fie X o suprafață proiectivă nesingulară și E o curbă conexă pe X de componente întregre E_1, \dots, E_n . Atunci există un morfism $f: X \rightarrow Y$ astfel încât $f|_{X-E}$ este un izomorfism între $X-E$ și $Y-f(E)$ și $f(E) = y$ este un punct nesingular pe Y dacă și numai dacă matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ și ciclul fundamental al lui E satisface condițiile $p_a(Z) = 0$ și $(Z^2) = -1$. În aceste condiții contracția (Y, f) este unic determinată abstractiv făcînd de un izomorfism canonic, iar Y este de asemenea proiectivă. Dacă în plus E este curbă integră cu

$p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -1$, atunci f coincide cu transformarea pătratică a lui Y de centru y .

Demonstrație. Exceptînd ultima afirmație, teorema este o consecință imediată a teoremei (3.9), teoremei (3.21) și corolarului (3.29). Pentru a dovedi că f coincide cu transformarea pătratică a lui Y de centru y dacă E este integră, observăm că din (3.8) rezultă $R^1f_*O_X = 0$, și deci după (3.23) idealul mO_X este inversibil (în notațiile lui (3.28)). Dacă $g: X' \rightarrow Y$ este transformarea pătratică a lui Y de centru y , există (proprietatea de universalitate a lui g) un unic morfism $u: X \rightarrow X'$ cu proprietățile $g \circ u = f$ și $u^*O_{X'}(1) \cong mO_X$. Cum u este morfism birațional cu fibre finite și X' este nesingulară, rezultă că u este izomorfism. Q.E.D.

(3.31) TEOREMĂ. Fie $f: X \rightarrow Y$ o desingularizare a singularității normale (Y, y) de dimensiune 2, $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ fibra redusă a lui f de componente integrale E_1, \dots, E_n și Z ciclul fundamental al lui E . Următoarele afirmații sînt echivalente:

a) $p_a(Z) = 0$ și $(Z^2) = -2$, altfel spus (Y, y) este un punct rațional dublu (cf. (3.21) și (3.29)).

b) $(Z \cdot K) = 0$ și $(Z^2) = -2$.

Dacă în plus E nu conține curbe E_i cu proprietățile $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -1$, atunci aceste condiții sînt echivalente și cu:

c) $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Demonstrație. Echivalența dintre a) și b) rezultă imediat din formula $p_a(Z) = 1/2(Z^2) + 1/2(Z \cdot K) + 1$. Observăm acum că în fiecare din condițiile a), b) sau c) avem $p_a(E_i) = 0$ pentru orice i , iar din ipotezele noastre rezultă $(E_i^2) \leq -2$ b) \Rightarrow c): avem $(K \cdot E_i) = 2p_a(E_i) - 2 - (E_i^2) \geq 0$. Fie $Z = \sum_{i=1}^n r_i E_i$; atunci $0 = (Z \cdot K) = \sum_{i=1}^n r_i (K \cdot E_i)$, și cum $(K \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i , rezultă $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i . Din $p_a(E_i) = 0$ rezultă atunci $(E_i^2) = -2$ pentru orice i .

c) \Rightarrow a): Am văzut deja în demonstrația lui (3.15) că $p_a(Z') \leq 0$ pentru orice $Z' > 0$ de suport conținut în E , deci după (3.8) și (3.21) rezultă $p_a(Z) = 0$. Cum $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , avem și $(Z \cdot K) = 0$, deci și $(Z^2) = -2$. Q.E.D.

(3.32) TEOREMĂ. Fie X o suprafață proiectivă și nesingulară și E o curbă conexă de componente integrale E_1, \dots, E_n . Presupunem că matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$, $i = 1, \dots, n$. Atunci există doar următoarele tipuri de configurații pentru E (corespunzătoare diagramelor Dynkin din

clasificarea algebrelor Lie semisimple), în care toate intersecțiile sînt transversale :

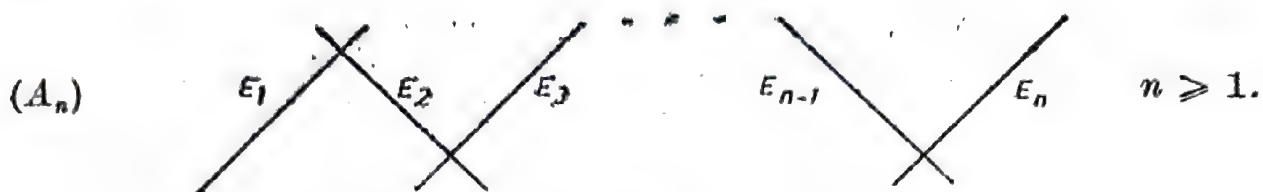


Figura 1

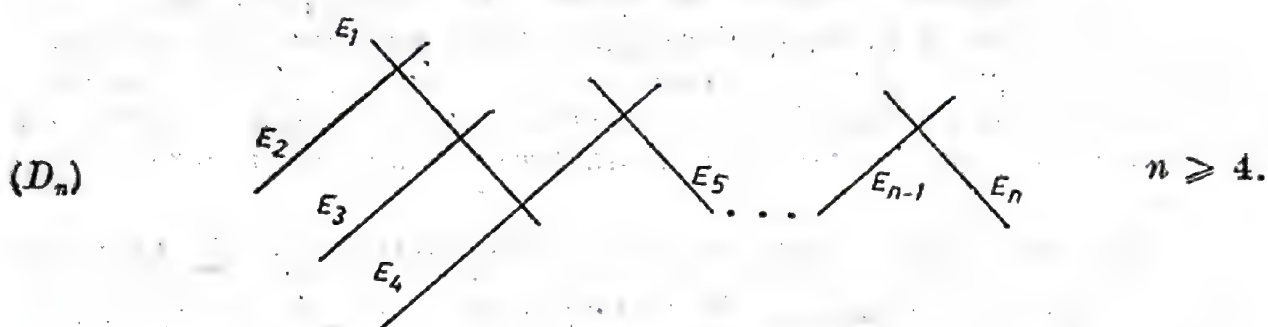


Figura 2

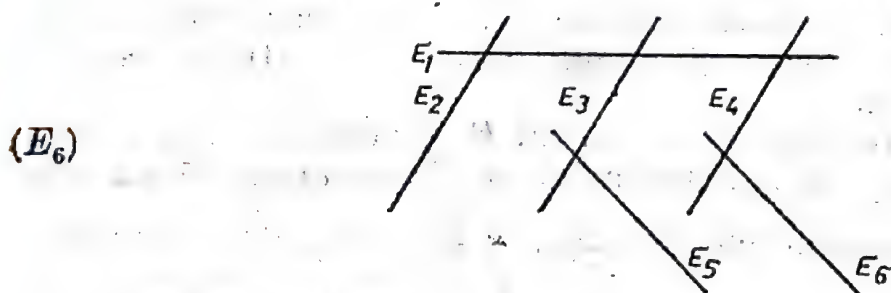


Figura 3

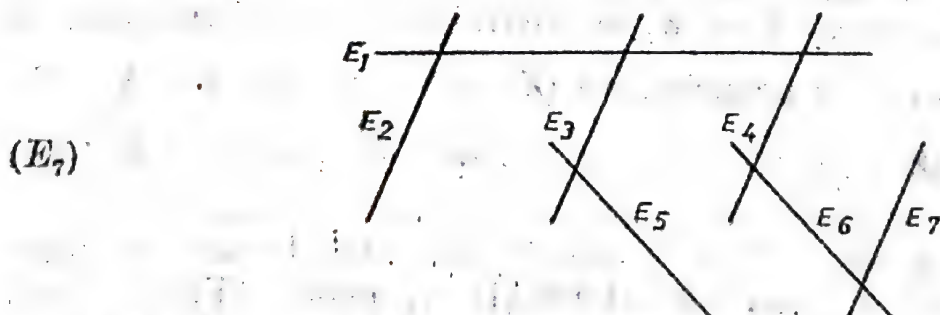


Figura 4

(E₈)

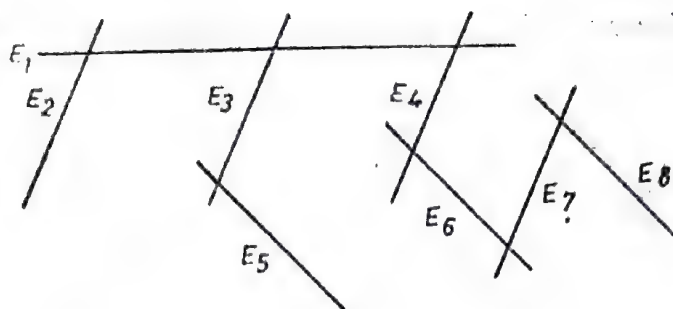


Figura 5

Pentru demonstrație avem nevoie de câteva pregătiri.

(3.32.1) Dacă în propoziția (2.5) graful asociat lui I este conex și în loc de ipoteza „ $z \cdot e_i = 0$ pentru orice i ” avem ipoteza mai slabă „ $z \cdot e_i \leq 0$ pentru orice i ”, atunci $x \cdot x \leq 0$ pentru orice $x \in M$. Dacă în plus presupunem $z \cdot z < 0$, atunci $x \cdot x = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

Demonstrația este practic aceeași : deoarece $z \cdot e_i = \sum_j a_j e_j \cdot e_i \leq 0$ avem $-\sum_i (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_i e_i) \geq \sum_{i,j} (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_j e_j) - \sum_i (c_i a_i e_i) \cdot (c_i a_i e_i) = \sum_{i \neq j} c_i^2 (a_i e_i) \cdot (a_j e_j) = 1/2 \sum_{i \neq j} (c_i^2 + c_j^2) (a_i e_i) \cdot (a_j e_j) \geq \sum_{i \neq j} c_i c_j (a_i e_i) \cdot (a_j e_j)$, de unde $x \cdot x \leq 0$. Dacă $z \cdot z < 0$, atunci ultimul semn \geq devine egalitate dacă și numai dacă $c_1 = c_2 = \dots = c$, iar prima inegalitate devine egalitate dacă și numai dacă $c = 0$ (ținând cont că $z \cdot e_i < 0$ pentru un i).

(3.32.2) Ciclul fundamental Z al lui E se poate calcula în felul următor : fie $Z_1 = E_{i_0}$, cu i_0 indice arbitrar. Presupunind că am definit $Z_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} E_i$, atunci punem $Z_{j+1} = Z_j + E_{i_j}$, dacă există o componentă E_{i_j} cu proprietatea $(E_{i_j} \cdot Z_j) > 0$. Dacă $(E_i \cdot Z_j) \leq 0$ pentru orice i , atunci $Z = Z_j$ este chiar ciclul fundamental al lui E .

Vom demonstra prin inducție că $Z_j \leq Z$, acest fapt fiind evident pentru $j = 1$. Dacă $Z_j < Z$, din definiția ciclului fundamental rezultă că există un i_j cu proprietatea $(Z_j \cdot E_{i_j}) > 0$. Fie $Z = \sum_{i=1}^n r_i E_i$, $r_i > 0$. Deoarece $(Z \cdot E_{i_j}) \leq 0$, $r_{i_j} > a_{ji_j}$ și deci $Z_{j+1} = Z_j + E_{i_j} \leq Z$. Q.E.D.

(3.32.3) Dacă $E = E_1 \cup \dots \cup E_n$ este graful unei desingularizări $f: X \rightarrow Y$ a unei singularități raționale (Y, y) (adică $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$), atunci pentru orice $i \neq j$ astfel încît $(E_i \cdot E_j) > 0$,

rezultă $(E_i \cdot E_j) = 1$. În plus, pentru orice $i \neq j \neq h \neq i$ avem $E_i \cap E_j \cap E_h = \emptyset$ și în componența acestui graf nu pot apărea bucle.

Într-adevăr, avem $0 \geq p_a(E_i + E_j) = p_a(E_i) + p_a(E_j) + (E_i \cdot E_j) - 1 = (E_i \cdot E_j) - 1$, de unde prima afirmație. Analog, $p_a(E_i + E_j + E_h) = p_a(E_i + E_j) + p_a(E_h) + (E_i + E_j \cdot E_h) - 1 = (E_i \cdot E_j) + (E_j \cdot E_h) + (E_i \cdot E_h) - 2 \leq 0$, de unde rezultă și afirmația a doua din (3.32.3). Presupunem acum că $h \geq 3$ componente E_1, \dots, E_h ar forma o buclă (fig. 6). Fie atunci $Z' = E_2 + \dots + E_h$. Prin inducție după h se arată imediat că $p_a(Z') = 0$. Deoarece $(E_1 \cdot Z') = 2$ avem

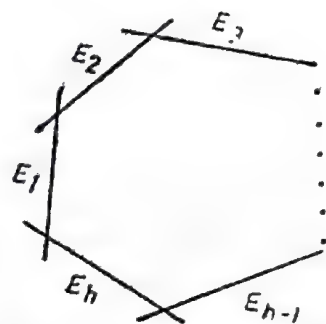


Figura 6

$$p_a(E_1 + Z') = p_a(E_1) + p_a(Z') + (E_1 \cdot Z') - 1 = (E_1 \cdot Z') - 1 \geq 1,$$

ceea ce este absurd deoarece (Y, y) este singularitate rațională. Q.E.D.

(3.32.4) În ipotezele lui (3.32), nu există nici-o componentă tăiată de cel puțin patru alte componente.

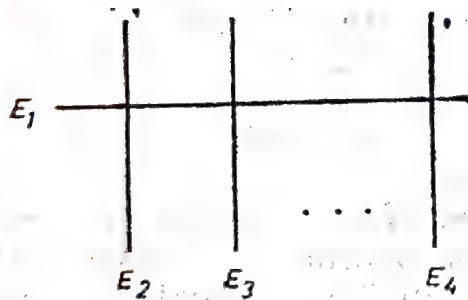


Figura 7

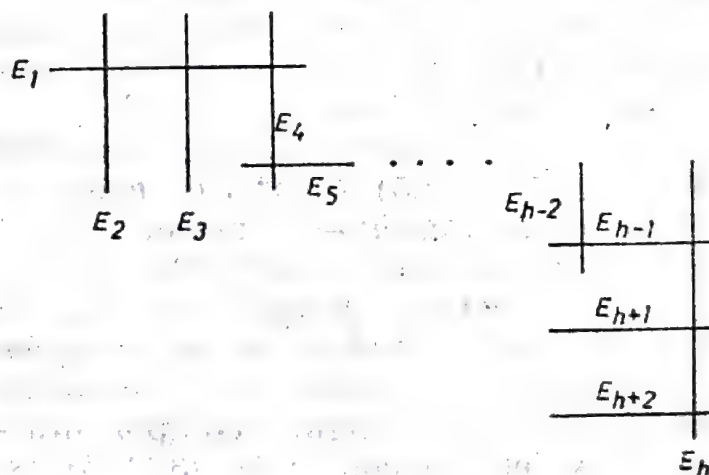


Figura 8

Într-adevăr, ținând cont de (3.32.3), fie E_1 tăiată de componentele E_2, \dots, E_h ca în figura 7. Ținând cont că E_i nu intersectează pe E_j pentru $i \neq j \geq 2$, avem (inducție după h):

$$p_a(E_2 + \dots + E_h) = -(h - 2).$$

Atunci

$$\begin{aligned} p_a(2E_1 + E_2 + \dots + E_h) &= p_a(2E_1) + p_a(E_2 + \dots + E_h) + \\ &+ 2(E_1 \cdot E_2 + \dots + E_h) - 1 = -3 - (h-2) + 2(h-1) - \\ &- 1 = h - 4 \leq 0, \end{aligned}$$

de unde $h \leq 4$.

(3.32.5) Nu pot exista (în ipotezele lui (3.32)) două componente tăiate fiecare de cîte trei componente.

Fie prin absurd componentele E_1 și E_h ($h \geq 4$) tăiate de cîte trei componente fiecare: E_1 de componentele E_2, E_3 și E_4 , iar E_h de componentele E_{h-1}, E_{h+1} și E_{h+2} . În plus, deoarece E este conexă, am avea o configurație ca în figura 8. Punînd $Z' = E_1 + E_4 + E_5 + \dots + E_h$, se verifică imediat că $p_a(Z') = 0$ și $(Z')^2 = -2$. Atunci Z' ar fi tăiată de curbele $E_2, E_3, E_{h+1}, E_{h+2}$. Însă $p_a(E_2 + E_3 + E_{h+1} + E_{h+2}) = -3$ și $p_a(2Z') = (Z')^2 - 1 = -3$. Deci $p_a(2Z' + E_2 + E_3 + E_{h+1} + E_{h+2}) = -3 - 3 + 2(Z' \cdot E_2) + 2(Z' \cdot E_3) + 2(Z' \cdot E_{h+1}) + 2(Z' \cdot E_{h+2}) - 1 = 1$, ceea ce contrazice ipotezele lui (3.32).

Demonstrația teoremei (3.32). Cazul 1. Nu există nici-o componentă tăiată de alte trei componente.

Atunci, ținînd cont de (3.32.3), rezultă că în mod necesar avem diagrama (A_n) , în care, după cum este imediat de verificat, ciclul fundamental al lui E este $Z = E_1 + \dots + E_n$.

Cazul 2. Există o componentă tăiată de alte trei componente.

După (3.32.5) o astfel de componentă este unică. Fie E_1 acea componentă, tăiată — să zicem — de E_2, E_3 și E_4 (și nu de mai multe componente cf. (3.32.4)).

2a) Două din componentele E_2, E_3 și E_4 — să zicem E_2 și E_3 — nu mai sînt tăiate de alte componente.

Dacă $n = 4$, atunci avem diagrama (D_4) . Presupunem deci $n \geq 5$. Atunci o singură componentă — să zicem E_5 — poate tăia pe E_4 (altfel s-ar contrazice (3.32.5)), și atunci E_5 nu poate tăia pe E_1 (cf. (3.32.3)) și nici pe E_2 sau E_3 prin ipoteză. Dacă $n = 5$, avem diagrama (D_5) . Dacă $n \geq 6$, o singură componentă — să zicem E_6 — poate tăia pe E_5 , și la fel ca mai înainte, pe nici una dintre componentele E_1, \dots, E_4 , și așa mai departe. Sîntem prin urmare conduși totdeauna în acest subcaz la diagrama (D_n) . În plus, dacă $n = 4$, ciclul fundamental este $Z = 2E_1 + E_2 + E_3 + E_4$, iar dacă $n \geq 5$, ciclul fundamental este $Z = 2E_1 + E_2 + E_3 + 2E_4 + \dots + 2E_{n-1} + E_n$.

2b) Numai una din componentele E_2, E_3, E_4 nu mai este tăiată de nici-o altă componentă $E_i, i \geq 5$. Să zicem spre exemplu că E_2 nu mai este tăiată de nici-o componentă $E_i, i \geq 5$. Vom arăta că acest subcaz conduce la diagramele $(E_6), (E_7)$, sau (E_8) .

În orice caz, numărul n al tuturor componentelor trebuie să fie ≥ 6 . Dacă $n = 6$, avem atunci în mod necesar diagrama (E_6) , în care caz ciclul fundamental este $Z = 3E_1 + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 + E_5 + E_6$ (totdeauna în calculul ciclului fundamental se folosește (3.32.2)), iar $(Z \cdot E_2) = -1, (Z \cdot E_i) = 0$ pentru $i \neq 2$.

Dacă $n = 7$, presupunem de exemplu că E_5 taie pe E_3, E_6 taie pe E_4 . Atunci componenta E_7 poate tăia, ținând cont de (3.32.3), (3.32.4) și (3.32.5), numai una din componentele E_5 sau E_6 , să zicem pe E_6 . Sîntem atunci conduși la diagrama (E_7) cu ciclul fundamental $Z = 4E_1 + 2E_2 + 3E_3 + 3E_4 + 2E_5 + 2E_6 + E_7$ satisfăcînd relațiile $(Z \cdot E_5) = -1, (Z \cdot E_i) = 0$ dacă $i \neq 5$.

Presupunem $n = 8$. Există două posibilități: componenta E_8 să taie fie pe E_5 fie pe E_7 . Însă E_8 nu poate tăia pe E_5 deoarece atunci, dacă Z' este ciclul fundamental al lui (E_7) , avem

$$((Z' + E_8)^2) = (Z'^2) + 2(Z' \cdot E_8) + (E_8^2) = -2 + 4 - 2 = 0,$$

ceea ce contrazice faptul că matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ. Prin urmare obținem în mod necesar diagrama (E_8) , avînd ciclul fundamental $Z = 6E_1 + 3E_2 + 4E_3 + 5E_4 + 2E_5 + 4E_6 + 3E_7 + 2E_8$ care satisface relațiile $(Z \cdot E_8) = -1$ și $(Z \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i \neq 8$.

În toate situațiile apărute pînă acum ar mai trebui să ne convingem că matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este negativ definită. Acest lucru se poate deduce imediat cu ajutorul lui (3.32.1), luînd $e_i = E_i$ și $z = Z$, deoarece avem $z \cdot z = -2$ și $z \cdot e_i \leq 0$ pentru orice i .

Ca să încheiem analiza subcazului 2b), va fi suficient să arătăm că în subcazul 2b) nu putem avea $n \geq 9$. Presupunem prin absurd că $n \geq 9$. Atunci după (3.32.3), (3.32.4) și (3.32.5) s-ar mai adăuga fie o componentă E' ce ar tăia (transversal) numai pe E_5 , fie o componentă E'' ce ar tăia numai pe E_8 . Dacă Z' este ciclul fundamental al diagramei (E_8) determinat mai sus, atunci am avea $(E_5 \cdot E') = 1, (E_8 \cdot E'') = 1$, deci $(Z' \cdot E') = 2, (Z' \cdot E'') = 2$. Atunci $((Z' + E')^2) = (Z'^2) + 2(Z' \cdot E') + (E'^2) = -2 + 4 - 2 = 0$, sau analog $((Z' + E'')^2) = 0$. Deci în ambele cazuri matricea de intersecție nu ar mai fi definită negativ.

2c) Toate componentele E_1, E_2 și E_4 sînt intersectate de cîte o componentă a lui E diferită de E_1 .

Vom arăta că în acest subcaz matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ nu poate fi definită negativ. Presupunem prin absurd că E_4 ar fi tăiată de componenta E_6 , E_3 de E_5 și E_2 de E_7 . Atunci ținând cont de (3.32.3) și (3.32.5), E_6 nu poate tăia pe E_1 , E_2 , E_3 sau E_7 ; E_5 nu poate tăia pe E_1 , E_2 , E_4 , E_6 sau E_7 ; și E_7 nu poate tăia pe E_1 , E_3 , E_4 , E_5 sau E_6 . Punind $Z' = 3E_1 + 2E_2 + 2E_3 + 2E_4 + E_5 + E_6$ (adică ciclul fundamental pentru configurația (E_6)), atunci avem $(Z')^2 = -2$ și $(Z' \cdot E_7) = 2$, de unde $((Z' + E_7)^2) = (Z')^2 + 2(Z' \cdot E_7) + (E_7^2) = -2 + 4 - 2 = 0$, adică matricea de intersecție nu este definită negativ.

Cu aceasta demonstrația teoremei (3.32) este completă.

(3.33) *Referințe bibliografice.* Acest paragraf are drept principale surse Artin [1] și [2]. Metoda de a demonstra (3.12), (3.13) și (3.14) aparține autorului. Anumite demonstrații (ca de exemplu (3.23), (3.24), și (3.25)) au fost inspirate din Lipman [1].

§. 4.

PROPRIETĂȚI ALE SINGULARITĂȚILOR RAȚIONALE

(4.1) TEOREMĂ (Laufer-Ramanujam). Fie $f: X \rightarrow Y$ o desingularizare a singularității normale (Y, y) , cu Y suprafață afină, E_1, \dots, E_n componentele ireductibile ale fibrei reduse $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ și L un \mathcal{O}_X -modul inversibil astfel încât $(L \cdot E_i) \geq (\omega_X \cdot E_i)$, $i = 1, \dots, n$. Atunci $H^1(X, L) = 0$.

Demonstrație. Fie I_i fasciculul inversibil de ideale al curbei E_i și punem $J = I_1 \otimes \dots \otimes I_n$ (fasciculul de ideale al lui $E = E_1 + \dots + E_n$).

Pasul 1. Pentru orice $h \geq 1$ aplicația $\sigma: H^1(X, J^h L) \rightarrow H^1(X, L)$ indusă de incluziunea $J^h L \subset L$ este surjectivă.

Demonstrație pasului 1. Deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ (cf. (2.7)), putem alege succesiv componentele E_{i_1}, \dots, E_{i_n} după cum urmează: $(E_{i_1} \cdot D_1) < 0$, unde $D_1 = \sum_{i=1}^n h E_i$;

fie $D_2 = D_1 - E_{i_1}$. În general, presupunînd D_j construit, fie E_{i_j} astfel încît $(E_{i_j} \cdot D_j) < 0$ și atunci punem $D_{j+1} = D_j - E_{i_j}$. Pentru orice j avem șirul exact

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D_j) \cdot L \rightarrow \mathcal{O}_X(-D_{j+1}) \cdot L \rightarrow M_j \rightarrow 0$$

în care M_j este concentrat pe E_{i_j} și $\deg(M_j) = -(E_{i_j} \cdot D_{j+1}) + (L \cdot E_{i_j}) = -(E_{i_j} \cdot D_j) + (E_{i_j}^2) + (L \cdot E_{i_j})$. Însă prin ipoteza teoremei, $(L \cdot E_{i_j}) \geq (\omega_X \cdot E_{i_j}) = \deg(\omega_{E_{i_j}}) - (E_{i_j}^2)$, și prin urmare obținem $\deg(M_j) > \deg(\omega_{E_{i_j}})$. Deci prin dualitatea Serre pe E_{i_j} avem $H^1(X, M_j) = H^1(E_{i_j}, M_j) = H^0(E_{i_j}, M_j^{-1} \otimes \omega_{E_{i_j}}) = 0$, deoarece $\deg(M_j^{-1} \otimes \omega_{E_{i_j}}) < 0$. Rezultă deci că omomorfismul

$\sigma_j: H^1(X, O_X(-D_j) \cdot L) \rightarrow H^1(X, O_X(-D_{j+1}) \cdot L)$ este surjectiv. Deoarece $D_{h_n+1} = 0$, omomorfismul σ este surjectiv, fiind compunerea $\sigma_{h_n} \circ \dots \circ \sigma_1$.

Pasul 2. Există un întreg $h \geq 1$ astfel încît aplicația de la pasul 1 să fie omomorfismul nul.

Demonstrația pasului 2. Dacă $\tau_j: H^1(X, m^j L) \rightarrow H^1(X, L)$ este aplicația indusă de incluziunea $m^j L \subset L$ (unde m este idealul maximal corespunzător punctului y pe Y), și dacă V_i este imaginea lui τ_i , obținem filtrarea $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots$ a lui $H^1(X, L)$. Deoarece $H^1(X, L)$ este finit dimensional ($H^1(X, L) = R^1 f_*(L)$ deoarece Y este afină, și $R^1 f_*(L)$ este un O_Y -modul coerent concentrat cel mult în punctul y , deoarece f este desingularizare), există un $h_1 \geq 1$ astfel încît $V_{h_1} = V_{h_1+1} = \dots = V$.

Pe de altă parte, după EGA III 3.3.2, există un $h_2 \geq 1$ astfel încît $V_{h_2+r} = m^r V_{h_2}$ pentru orice $r \geq 1$ (fiecare $a \in m^r$ induce prin multiplicare aplicația $m^j L \rightarrow m^{j+r} L$, și deci aplicația $H^1(X, m^j L) \rightarrow H^1(X, m^{j+r} L)$). În particular, obținem $V = mV$, și după lema lui Nakayama, $V = 0$. Cu alte cuvinte, punînd $h' = \max(h_1, h_2)$, aplicația $\tau_{h'}$ este nulă. În fine, deoarece mO_X este fasciculul de ideale ce definește fibra $f^{-1}(y)$ (în general mO_X este neinvertibil), există un $s \geq 1$ astfel încît $J^s \subseteq mO_X$. Demonstrația pasului 2 se încheie luînd $h = sh'$.

Demonstrația teoremei (4.1) se obține combinînd pașii 1 și 2.

Remarcăm că demonstrația de mai sus aparține lui Laufer [1], mai puțin argumentarea algebrică a pasului 2 (care face demonstrația lui Laufer valabilă în orice caracteristică). O altă demonstrație a teoremei (4.1) se poate găsi în Ramanujam [1].

(4.2) LEMĂ. Fie (Y, y) o singularitate normală cu Y suprafață afină. Atunci completatul m -adic $\hat{O}_{Y,y}$ al inelului local $O_{Y,y}$ al lui (Y, y) este normal. În plus, dacă $f: X \rightarrow Y$ este o desingularizare a lui (Y, y) , atunci $\hat{f}: \hat{X} = X \times_Y \text{Spec } \hat{O}_{Y,y} \rightarrow \text{Spec } \hat{O}_{Y,y} = \hat{Y}$ este o desingularizare a lui (Y, y) , cu y punctul închis al lui Y , incluziunile $f^{-1}(y) \hookrightarrow X$ și $\hat{f}^{-1}(\hat{y}) \hookrightarrow \hat{X}$ sînt formal echivalente și $H^1(X, O_X) \otimes \hat{O}_{Y,y} \cong H^1(\hat{X}, O_{\hat{X}})$.

Demonstrație. După teorema Zariski-Abhyankar există o desingularizare $f: X \rightarrow Y$ a lui (Y, y) . Deoarece pătratul

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\quad v \quad} & X \\ \downarrow \hat{f} & & \downarrow f \\ \hat{Y} & \xrightarrow{\quad u \quad} & Y \end{array}$$

este cartezian și v este morfism fidel plat, rezultă formula $H^1(X, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{Y,v} \cong H^1(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ (vezi EGA III 1.4.15). În plus, fibrele $f^{-1}(y)$ și $\hat{f}^{-1}(\hat{y})$ se identifică în mod canonic via morfismul v , iar scufundările $f^{-1}(y) \hookrightarrow X$ și $\hat{f}^{-1}(\hat{y}) \hookrightarrow \hat{X}$ sînt formal echivalente. Presupunem pentru moment că am dovedit că \hat{X} este schemă nesingulară. Atunci deoarece $H^0(X, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{Y,v} = H^0(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}})$ (loc. cit.), avem $H^0(\hat{X}, \mathcal{O}_{\hat{X}}) = \mathcal{O}_{Y,v}$ și deci $\mathcal{O}_{Y,v}$ este normal. Rămîne deci de dovedit că $f: \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ este o desingularizare a lui (\hat{Y}, \hat{y}) . Deoarece f este izomorfism între $X - f^{-1}(y)$ și $Y - y$, \hat{f} este de asemenea izomorfism între $\hat{X} - \hat{f}^{-1}(\hat{y})$ și $\hat{Y} - \hat{y}$. Fie acum $\hat{x} \in \hat{X}$ un punct închis arbitrar. Dacă arătăm că inelul local $\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{x}}$ este regulat, este clar că X este schemă nesingulară. Deoarece \hat{f} este propriu, \hat{f} este de asemenea propriu, deci $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{y}$. În particular, $k(\hat{x}) = k(\hat{y}) = k(y) = k$ (k fiind algebric închis). Fie $x = v(\hat{x})$. Atunci deoarece $v^{-1}(x) = \hat{X} \otimes_x k(x) = \hat{Y} \otimes_y k(y) = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,v}/m_y \mathcal{O}_{Y,v}) = \text{Spec } k(y) = \text{Spec } k$, rezultă $m_{X,x} \mathcal{O}_{\hat{X},\hat{x}} = m_{\hat{X},\hat{x}}$. Cum v este plat, inelul local $\mathcal{O}_{\hat{X},\hat{x}}$ este regulat deoarece $\mathcal{O}_{X,x}$ are această proprietate. Q.E.D.

(4.3) DEFINIȚIE. Fie X o suprafață nesingulară (nu neapărat proiectivă) și C o curbă integră pe X . Vom spune că C este *curbă excepțională de prima specie* dacă C este proiectivă, $p_a(C) = 0$ și $(C^2) = -1$ (în general are sens indicele de intersecție $(C_1 \cdot C_2)$ a două curbe C_1 și C_2 situate pe o suprafață nu neapărat proiectivă, cu condiția ca una din ele să aibă toate componentele proiective).

Dacă C este o curbă excepțională de prima specie pe suprafața nesingulară X , atunci există o unică suprafață nesingulară Y și un morfism notat $\text{cont}_C: X \rightarrow Y$ cu proprietățile: cont_C este morfism propriu, contractă curba C la un punct și este izomorfism în afara curbei C . Acest fapt este o consecință imediată a teoremei (3.30), faptul că X nu este proiectivă nefiind un impediment (putem completa suprafața X la una proiectivă \tilde{X} și a aplica teorema (3.30) acesteia din urmă; într-adevăr, chiar dacă \tilde{X} are singularități la infinit acest lucru nu contează).

(4.4) DEFINIȚIE. Fie $f: X \rightarrow Y$ o desingularizare a singularității normale (Y, y) de dimensiune 2. Vom spune că f este o *desingularizare minimală* dacă fibra redusă $f^{-1}(y)_{\text{red}} = E$ nu conține componente care să fie curbe excepționale de prima specie.

Observăm că orice asemenea singularitate (Y, y) posedă cel puțin o desingularizare minimală. Într-adevăr, dacă $f: X \rightarrow Y$ este

o desingularizare arbitrară a lui (Y, y) și care nu este minimală, fie E_1 o componentă a lui E care este curbă excepțională de prima specie. Atunci suprafața nesingulară $\text{cont}_{E_1}(X)$ domină pe Y , deci obținem o desingularizare $f_1: \text{cont}_{E_1}(X) = X_1 \rightarrow Y$. Dacă f_1 este minimală am terminat. Dacă nu, observăm mai întâi că fibra $f_1^{-1}(y)$ conține $n - 1$ componente, unde n este numărul componentelor lui E . Se repetă procedeul de mai sus și după un număr finit de pași se ajunge cu siguranță la o desingularizare minimală a lui (Y, y) . Importanța desingularizărilor minimale rezultă din următoarea propoziție:

(4.5) PROPOZIȚIE. *Dacă (Y, y) este o singularitate a suprafeței normale Y , atunci există o desingularizare minimală $f: X \rightarrow Y$ a lui (Y, y) . În plus, pentru orice altă desingularizare $f': X' \rightarrow Y$ există un morfism unic $u: X' \rightarrow X$ astfel încît $f \circ u = f'$. În particular, orice două desingularizări minimale ale lui (Y, y) sînt canonic izomorfe. În fine, dacă f este minimală și fibra sa redusă E are componentele ireductibile E_1, \dots, E_n , atunci $(\omega_X \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.*

Demonstrație. Existența lui f a fost probată mai sus. Fie acum $u = f^{-1} \circ f'$. Atunci u este un morfism birațional. Ținînd cont de structura morfismelor biraționale între două suprafețe proiective X' și X (într-adevăr, X' și X pot fi presupuse a fi proiective, deoarece Y poate fi presupusă — fără a restrînge generalitatea — proiectivă, iar morfismele f' și f sînt de asemenea proiective), există un morfism $v: X'' \rightarrow X'$ care este compunere de un număr finit de transformări pătratice astfel încît $u \circ v$ să fie morfism. Alegem pe v astfel încît în compunerea sa să intre un număr minim de transformări pătratice. Trebuie demonstrat că acest număr este zero, adică u este un morfism. Dacă, prin absurd, acest număr ar fi > 0 , atunci ar exista pe X'' o curbă excepțională de prima specie E'' ce ar fi conținută în fibra $(f' \circ v)^{-1}(y)$. Dacă $(u \circ v)(E'')$ ar fi un punct, atunci $\text{cont}_{E''}(X'')$ ar domina pe X (și pe X') și astfel s-ar contrazice minimalitatea lui v . Deci $(u \circ v)(E'')$ este o componentă — să zicem E_1 — a fibrei $f^{-1}(y)$. Cum $u \circ v$ este un morfism birațional, $u \circ v$ este o compunere de un număr finit de transformări pătratice. Cum prin ipoteză f este minimală, $(E_1^2) \leq -2$, și cum transformata proprie a unei curbe C printr-o transformare pătratică are autointersecția mai mică sau egală decît (C^2) , rezultă deci că $(E''^2) \leq -2$, ceea ce contrazice faptul că E'' este curbă excepțională de prima specie.

În fine, din relația (formula de adjuncție)

$$(\omega_X \cdot E_i) = 2p_a(E_i) - 2 - (E_i^2)$$

și din faptul că $(E_i^2) < 0$ (cf. (2.7)) combinat cu inegalitatea $p_a(E_i) \geq 0$, rezultă că $(\omega_X \cdot E_i)$ ar putea fi < 0 dacă și numai dacă $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -1$, adică E_i ar fi curbă excepțională de prima specie. Q.E.D.

(4.6) TEOREMĂ. Fie (Y, y) o singularitate normală, cu Y suprafață afină. Atunci (Y, y) este o singularitate rațională dacă și numai dacă grupul claselor de divizori al completatului m_y -adic $\hat{O}_{Y,y}$ al inelului local $O_{Y,y}$ este un grup finit. În acest caz ordinul său coincide cu determinantul d (în valoare absolută) al matricei de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$.

Demonstrație. După (4.2) putem înlocui (Y, y) cu (\hat{Y}, \hat{y}) , unde $\hat{Y} = \text{Spec } \hat{O}_{Y,y}$, deci putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că $Y = \text{Spec } (A)$ cu A inel local noetherian, normal, de dimensiune 2 și complet în topologia idealului maximal, care posedă o desingularizare $f: X \rightarrow Y$. În plus, ținînd cont de (4.5) putem presupune că fibra redusă $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ nu conține curbe excepționale de prima specie, adică f este desingularizare minimală. Fie Z unicul ciclu de suport conținut în E astfel încît $(Z \cdot E_i) = -(\omega_X \cdot E_i) \cdot d$, $i = 1, \dots, n$, (matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ). Deoarece din (4.5) avem $(\omega_X \cdot E_i) \geq 0$, rezultă că $Z > 0$ (cf. demonstrației lui (3.9)) și deci Z majorează ciclul fundamental al lui E . În particular, suportul lui Z este E .

Deoarece A este complet, omomorfismul natural de restricție $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(X_E)$ este un izomorfism, unde prin X_E am notat completatul formal al lui X de-a lungul lui E (vezi EGA III 5.1.4). Însă $\text{Pic}(X_E)$ se identifică în mod natural cu $\varprojlim_m \text{Pic}(mZ)$, în care omo-

morfismele sistemului proiectiv de mai sus sînt cele de restricție. (vezi Hartshorne [3], chap. IV și EGA III chap. 0, 13.3.1). Însă considerînd șirul exact standard ($m \geq 1$)

$$0 \rightarrow O_X(-mZ) \otimes O_Z \rightarrow O_{(m+1)Z}^* \rightarrow O_{mZ}^* \rightarrow 1.$$

rezultă șirul exact de coomologie

$$H^1(O_X(-mZ) \otimes O_Z) \rightarrow \text{Pic}((m+1)Z) \rightarrow \text{Pic}(mZ) \rightarrow H^2(O_X(-mZ) \otimes O_Z)$$

Dar deoarece $(O_X(-mZ) \cdot E_i) = -m(Z \cdot E_i) = md(\omega_X \cdot E_i) \geq (\omega_X \cdot E_i)$ pentru orice i , din (4.1) rezultă $H^1(O_X(-mZ)) = 0$ și deci primul grup de coomologie din șirul exact de mai sus este trivial. Cum orice H^2 se anulează pe Z , rezultă că toate omomorfismele sistemului proiectiv de mai sus sînt izomorfisme. În concluzie

rezultă că omomorfismul natural de restricție $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Z)$ este un izomorfism.

Pe de altă parte, deoarece X este schemă neregulară, avem echivalență între divizorii Weil și divizorii Cartier pe X , de unde rezultă imediat că omomorfismul de restricție $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(U)$, cu $U = X - E = Y - y$, este surjectiv și nucleul său este generat de clasele fasciculelor inversibile $O_X(E_1), \dots, O_X(E_n)$. Ținând cont de toate aceste fapte și de izomorfismele de mai sus, rezultă că $\text{Pic}(U)$ se poate identifica cu $\text{Pic}(mZ)/H$, unde $m \geq 1$ este arbitrar, iar H este subgrupul lui $\text{Pic}(mZ)$ generat de clasele fasciculelor inversibile $O_X(E_i) \otimes O_{mZ}$. Însă cum A este normal și de dimensiune > 1 , $\text{Pic}(U)$ se identifică de asemenea cu grupul claselor de divizori al lui A . În diagrama comutativă cu liniile exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \text{Pic}(mZ) & \longrightarrow & \text{Pic}(U) \longrightarrow 0 \\ & & \delta' \downarrow & & \delta \downarrow & & \delta'' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \delta(H) & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n / \delta(H) \longrightarrow 0 \end{array}$$

omomorfismul δ' este izomorfism deoarece matricea $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ. Deci $\text{Ker}(\delta) = \text{Ker}(\delta'')$.

Presupunând acum $\text{Pic}(U)$ finit, rezultă $\text{Ker}(\delta)$ finit și după (3.4) și (3.3), $H^1(O_{mZ}) = 0$ pentru orice $m \geq 1$, și deci, ținând cont de teorema lui Zariski a funcțiilor olomorfe, $H^1(O_X) = 0$. Altfel spus, (Y, y) este singularitate rațională.

Reciproc, presupunând (Y, y) singularitate rațională, atunci δ este izomorfism după (3.4), și (3.3), și deci δ'' este de asemenea izomorfism. Altfel spus, $\text{Pic}(U)$ se identifică cu conucleul următorului omomorfism de grupuri libere de rang $n: \mathbb{Z}E_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}E_n = H \rightarrow \mathbb{Z}^n$, $E_i \mapsto ((E_i \cdot E_1), \dots, (E_i \cdot E_n))$. De aici rezultă că $\text{Pic}(U)$ este finit de ordin egal cu modulul determinantului matricei de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$. Q.E.D.

(4.7) COROLAR. Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeței afine Y , astfel încât completatul m_y -adic al lui $O_{Y,y}$ să fie factorial. Atunci (Y, y) este singularitate rațională.

(4.8) Fie acum (Y, y) o singularitate normală izolată de dimensiune $d \geq 2$ a unei varietăți afine $Y = \text{Spec}(A)$ și neregulară în afara lui y . Presupunem că (Y, y) admite o desingularizare $f: X \rightarrow Y$, adică un morfism proiectiv f astfel încât: a) Fibra redusă $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ este o submulțime (închisă) de codimensiune pură 1 în X și având componentele ireductibile E_1, \dots, E_n , b) X este varietate neregulară, și c) f este izomorfism între $X - E$ și $Y - y$.

După rezultatele lui Hironaka [1] o asemenea desingularizare există întotdeauna în caracteristică zero. Dacă $d = 2$, (Y, y) admite, după cum am remarcat deja, o desingularizare peste orice corp algebric închis de caracteristică arbitrară. Fie m idealul maximal al lui A corespunzător punctului y . Dacă M este un A -modul, vom nota prin \hat{M} completatul m -adic al lui M . Dacă N este un k -spațiu vectorial, atunci prin N' vom nota dualul algebric al lui N , adică $N' = \text{Hom}_k(N, k)$. De asemenea, dacă L este un O_Z -modul local liber de rang finit (cu Z schemă arbitrară), atunci \check{L} va însemna dualul lui L , adică $\check{L} = \mathcal{H}om_{O_Z}(L, O_Z)$.

(4.9) TEOREMĂ. În notațiile de mai sus, presupunem că singularitatea normală izolată (Y, y) de dimensiune $d \geq 2$ admite desingularizarea $f: X \rightarrow Y$. Atunci pentru orice O_X -modul local liber L de rang finit și pentru orice $p \geq 0$, există un izomorfism natural de k -spații vectoriale între $H_E^p(X, L)$ (coomologia locală cu suport în $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$) și $(H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)^\vee)'$. Dacă $p < d$, spațiile $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$ sînt finit dimensionale, și în acest caz izomorfismul de mai sus devine $H_E^p(X, L) \cong H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)'$.

Demonstrație. Deoarece L este local liber avem $H_E^0(X, L) = 0$, și deoarece $d > \dim(E)$ avem de asemenea $H^d(X, \check{L} \otimes \omega_X) = 0$. Putem deci presupune $p > 0$. Deoarece Y este afină iar f este morfism propriu și izomorfism în afara lui y , $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$ este finit dimensional dacă $p < d$ (deoarece coincide cu $R^{d-p}f_*(\check{L} \otimes \omega_X)$), deci $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)^\vee = H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$.

Presupunînd acum $p > 0$, avem, după Grothendieck [4], teorema (2.8):

$$(4.9.1) \quad H_E^p(X, L) = \varinjlim_m \text{Ext}_{O_X}^p(O_{mE}, L),$$

unde $O_{mE} = O_X/I^m$ cu $I = O_X(-E)$ idealul lui E în O_X . Acum vom folosi următoarea leamnă:

(4.10) LEMĂ. Fie D un divizor efectiv pe X definit de idealul $J \subset O_X$. Atunci pentru orice O_X -modul local liber L de rang finit, există un izomorfism canonic $H^{p-1}(D, L \otimes J^{-1} \otimes O_D) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{O_X}^p(O_D, L)$ pentru orice $p > 0$.

Presupunînd pentru moment lema (4.10), izomorfismul (4.9.1) devine:

$$(4.9.2) \quad H_E^p(X, L) = \varinjlim_m H^{p-1}(mE, L \otimes I^{-m} \otimes O_{mE}).$$

Însă $\omega_X \otimes I^{-m} \otimes O_{mE}$ este izomorf cu fasciculul dualizant ω_{mE} (după (3.11.5)). Aplicînd teorema de dualitate Grothendieck-Serre pe schema proiectivă și Cohen-Macaulay mE , obținem :

$$\begin{aligned} H_E^p(X, L) &= \varinjlim_m H^{p-1}(mE, L \otimes \omega_X^{-1} \otimes \omega_{mE}) = \\ &= \varinjlim_m H^{(d-1)-(p-1)}(mE, \check{L} \otimes \omega_X \otimes O_{mE})' = \\ &= \varprojlim_m H^{d-p}(mE, \check{L} \otimes \omega_X \otimes O_{mE})'. \end{aligned}$$

Acum, după teorema lui Zariski a funcțiilor olomorfe (EGA III 4.2.1), ultimul spațiu vectorial coincide cu dualul completatului m -adic al lui $H^{d-p}(X, \check{L} \otimes \omega_X)$. Teorema (4.9) este demonstrată modulo lema (4.10).

Demonstrația lemei (4.10). Considerăm șirul spectral asociat compunerii de Ext-uri (cf. Altman-Kleiman [1], IV (2.9.1)) :

$$E_2^q = \text{Ext}_{O_D}^q(O_D, \mathcal{E}xt_{O_X}^q(O_D, L)) \Rightarrow \text{Ext}_{O_X}^{p+q}(O_D, L).$$

Deoarece O_D admite rezoluția $0 \rightarrow J \rightarrow O_X \rightarrow O_D \rightarrow 0$, rezultă că pentru orice $q \geq 2$, $\mathcal{E}xt_{O_X}^q(O_D, L) = 0$. Pe de altă parte, deoarece L este local liber, avem de asemenea $\mathcal{E}xt_{O_X}^0(O_D, L) = \mathcal{H}om_{O_X}(O_D, L) = 0$, și deci $E_2^q = 0$ pentru orice $q \neq 1$. Altfel spus, șirul spectral de mai sus degenerază și deci pune în evidență izomorfismele :

$$H^{p-1}(D, \mathcal{E}xt_{O_X}^1(O_D, L)) = \text{Ext}_{O_D}^{p-1}(O_D, \mathcal{E}xt_{O_X}^1(O_D, L)) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{O_X}^p(O_D, L).$$

Însă după o identificare de tipul (3.11.5) (vezi Altman-Kleiman [1], I (2.4)), $\mathcal{E}xt_{O_X}^1(O_D, L) \cong L \otimes J^{-1} \otimes O_D$, fapt ce încheie demonstrația lemei (4.10).

(4.11) COROLAR. În notațiile teoremei (4.1), dacă Y este suprafață, avem $H^1(X, \omega_X) = 0$ și $H_E^1(X, M) = 0$ pentru orice O_X -modul inversibil M astfel încît $(M \cdot E_i) \leq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$.

Demonstrație. Prima afirmație rezultă direct din teorema (4.1). Pe de altă parte, din (4.9) rezultă $\dim H_E^1(X, M) = \dim H^1(X, M^{-1} \otimes \omega_X)$. Dar deoarece $(M \cdot E_i) \leq 0$, $(M^{-1} \otimes \omega_X \cdot E_i) \geq (\omega_X \cdot E_i)$ pentru orice $i = 1, \dots, n$, și deci după (4.1) $H^1(X, M^{-1} \otimes \omega_X) = 0$.

(4.12) COROLAR. În notațiile corolarului (4.11), pentru orice O_X -modul inversibil L astfel încât $(L \cdot E_i) \geq (\omega_X \cdot E_i)$, ($i = 1, \dots, n$), are loc șirul exact

$$0 \rightarrow H^0(X, L) \rightarrow H^0(X - E, L) \rightarrow H^1(X, L^{-1} \otimes \omega_X)' \rightarrow 0.$$

În particular, $\dim H^1(X, O_X) = \dim H^0(X - E, \omega_X) / H^0(X, \omega_X)$, și deci (Y, y) este singularitate rațională dacă și numai dacă orice secțiune a lui ω_X din $X - E$ se poate prelungi la o secțiune pe întregul X .

Demonstrație. Șirul exact din enunț se deduce din șirul exact de coomologie locală

$$0 \rightarrow H^0(X, L) \rightarrow H^0(X - E, L) \rightarrow H_E^1(X, L) \rightarrow H^1(X, L)$$

ținând cont că $H^1(X, L) = 0$ (cf. (4.1)) și $H_E^1(X, L) = H^1(X, L^{-1} \otimes \omega_X)'$ (cf. (4.9)). Ultima afirmație se obține luând $L = \omega_X$ și folosind corolarul precedent.

(4.13) În notațiile corolarului (4.12), dacă L este un O_X -modul local liber de rang finit, atunci șirul exact (obținut din șirul exact de coomologie locală combinat cu teorema (4.9)) :

$$0 \rightarrow \Gamma(X, L) \rightarrow \Gamma(X - E, L) \rightarrow H^1(X, \check{L} \otimes \omega_X)' \rightarrow H^1(X, L)$$

arată că $\Gamma(X - E, L) / \Gamma(X, L)$ este un spațiu vectorial finit dimensional și în plus $\dim (\Gamma(X - E, L) / \Gamma(X, L)) = \dim \text{Ker} (H^1(X, \check{L} \otimes \omega_X)' \rightarrow H^1(X, L)) = \dim \text{Ker} (R^1 f_* (\check{L} \otimes \omega_X)' \rightarrow R^1 f_* (L))$. De aici deducem că $\dim (\Gamma(X - E, L) / \Gamma(X, L))$ nu depinde de Y în sensul următor: dacă Y' este un deschis afin în Y ce conține punctul y și dacă $X' = f^{-1}(Y')$, atunci

$$(4.13.1) \quad \dim (\Gamma(X - E, L) / \Gamma(X, L)) = \dim (\Gamma(X' - E, L) / \Gamma(X', L)).$$

Pe de altă parte, fie $g: \tilde{X} \rightarrow X$ eclatarea lui X de centru punctul (redus) $u \in E$, și fie C curba excepțională $g^{-1}(u)$ definită de idealul inversibil J în $O_{\tilde{X}}$. Pentru orice $s \geq 0$ punem $L_s = g^*(L) \otimes J^{-s}$. Atunci după formula proiecției $g_*(L_s) \cong L \otimes g_*(J^{-s}) \cong L$, deoarece pentru orice $s \geq 0$ avem $g_*(J^{-s}) \cong O_X$. (*Demonstrație:* problema fiind locală în jurul lui u , putem presupune că X este afină. Folosim inducție după s , cazul $s = 0$ fiind clar; în general, șirul exact $0 \rightarrow J^{-s+1} \rightarrow J^{-s} \rightarrow O_C(-s) \rightarrow 0$ arată că aplicația $\Gamma(\tilde{X}, J^{-s+1}) \rightarrow \Gamma(\tilde{X}, J^{-s})$ este un izomorfism, deoarece dacă $s > 0$, $\Gamma(C, O_C(-s)) = 0$. Prin urmare

obținem $\Gamma(X - E, L) \cong \Gamma(\tilde{X} - \tilde{E} \cup C, L_s)$ și $\Gamma(X, L) \cong \Gamma(\tilde{X}, L_s)$, \tilde{E} fiind transformata proprie a curbei E prin g . Cu alte cuvinte, avem :

$$(4.13.2) \dim(\Gamma(X - f^{-1}(y), L) / \Gamma(X, L)) = \dim(\Gamma(\tilde{X} - (f \circ g)^{-1}(y), L_s) / \Gamma(\tilde{X}, L_s))$$

Dacă $L = \omega_X$, avem formula bine cunoscută $g^*(\omega_X) \otimes J^{-1} = \omega_{\tilde{X}}$ și deci pentru orice $q \geq 1$, $g^*(\omega_X^q) \otimes J^{-q} = \omega_{\tilde{X}}^q$. Din discuția de mai sus rezultă că pentru fiecare $q \geq 1$, numărul

$$(4.13.3) \quad r_v(q) = \dim(\Gamma(X - E, \omega_X^q) / \Gamma(X, \omega_X^q))$$

este un invariant numeric al singularității (Y, y) (ca să arătăm că nu depinde de alegerea desingularizării se folosește și faptul că orice altă desingularizare a lui (Y, y) se obține din f printr-o compunere de transformări pătratice sau de inverse de acestea). În cazul complex-analitic invariații $r_v(q)$ ($q \geq 1$) au fost introduși și studiați de Laufer [1] și Knöller [1].

Indicăm acum alte consecințe ale teoremelor (4.1) și (4.9).

(4.14) COROLAR. Fie (Y, y) o singularitate normală cu Y suprafață afină, și fie $f: X \rightarrow Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y) (cf. 4.5). Atunci $H^1(X, \omega_X^q) = 0$ și $r_v(q) = \dim H^1(X, \omega_X^{1-q})$ pentru orice $q \geq 1$.

Demonstrație. După (4.5) $(\omega_X \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i , deci $(\omega_X^q \cdot E_i) \geq (\omega_X \cdot E_i)$ pentru orice i . Din (4.1) deducem $H^1(X, \omega_X^q) = 0$. Ultima formulă rezultă atunci din (4.12).

(4.15) COROLAR. În notațiile corolarului precedent, (Y, y) este singularitate rațională dacă și numai dacă $r_v(1) = 0$. Dacă (Y, y) este punct rațional dublu, atunci $r_v(q) = 0$ pentru orice $q \geq 1$. Reciproc, dacă y este un punct normal dar nu regulat pe Y și $r_v(1) = r_v(q_0) = 0$ pentru un $q_0 \geq 3$, atunci (Y, y) este punct rațional dublu.

Demonstrație. Fie $f: X \rightarrow Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y) . Prima afirmație rezultă din (4.14) și (4.12). Dacă (Y, y) este punct rațional dublu, atunci ținând cont de (3.29) și (3.31), avem $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$, și deci $(\omega_X \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$. De aici rezultă (cf. (4.1)) $H^1(X, \omega_X^{1-q}) = 0$ și deci $r_v(q) = 0$ pentru orice $q \geq 1$.

Reciproc, $r_v(1) = 0$ înseamnă exact faptul că (Y, y) este singularitate rațională. Șirul exact ($q \geq 1, i = 1, \dots, n$)

$$0 \rightarrow I_i \otimes \omega_X^{1-q} \rightarrow \omega_X^{1-q} \rightarrow (\omega_{E_i} \otimes I_i / I_i^2)^{1-q} = L_{i,q} \rightarrow 0$$

(I_i fiind idealul inversibil al lui E_i în X) pune în evidență șirul exact de coomologie :

$$H^1(X, \omega_X^{1-q}) \rightarrow H^1(E_i, L_{i,q}) \rightarrow H^2(X, I_i \otimes \omega_X^{1-q}) = 0$$

Din ipoteză rezultă, ținând cont de (4.14), că primul grup de coomologie este zero pentru un $q_0 \geq 3$, de unde $H^1(E_i, L_{i,q_0}) = 0$. Pe de altă parte, $\deg(L_{i,q_0}) = (1 - q_0) \cdot (-2 - (E_i^2)) \leq 0$ deoarece (Y, y) fiind singularitate rațională, $p_a(E_i) = 0$, iar f fiind desingularizarea minimală a lui (Y, y) , avem de asemenea $(E_i^2) \leq -2$, pentru orice i . Dacă (Y, y) nu ar fi punct rațional dublu, atunci $-2 - (E_i^2) > 0$ pentru un i , deci $\deg(L_{i,q_0}) \leq -2$ ($q_0 \geq 3$). Cum E_i este izomorfă cu dreapta proiectivă, acest fapt intră în contradicție cu trivialitatea lui $H^1(E_i, L_{i,q_0})$. Q.E.D.

(4.16) Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeței afine Y , și fie $f: X \rightarrow Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y) . Dacă (Y, y) este singularitate Gorenstein, fasciculus dualizant ω_Y este inversibil (în jurul lui y); fie atunci $L = \omega_X \otimes f^*(\omega_Y)^{-1}$. Deoarece L este trivial în $X - E$, L este în mod necesar de forma $L \cong I_1^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes I_n^{\alpha_n}$, unde ca și mai sus $I_i = \mathcal{O}_X(-E_i)$, iar $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, n$). Însă deoarece $(L \cdot E_i) = (\omega_X \cdot E_i) - (f^*(\omega_Y) \cdot E_i) = (\omega_X \cdot E_i) \geq 0$ (cf. (4.5) deoarece f este minimală), rezultă că $\alpha_i \geq 0$ pentru orice i (vezi demonstrația teoremei (3.9)). Obținem deci :

$$(4.16.1) \quad \omega_X \cong f^*(\omega_Y) \otimes I_1^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes I_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i \geq 0.$$

Înlocuind la nevoie pe Y cu un deschis afin mai mic ce conține pe y și în care ω_Y este trivial, formula (4.16.1) devine :

$$(4.16.2) \quad \omega_X \cong I_1^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes I_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i \geq 0.$$

Considerăm atunci divizorul efectiv $D = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$. Dacă $D=0$, atunci ω_Y este trivial și formula de adjuncție împreună cu (3.31) implică faptul că (Y, y) este punct rațional dublu.

Presupunem acum $D > 0$. Atunci, după cum este imediat de văzut, $\alpha_i > 0$ pentru orice i . După (3.11.5) fasciculus dualizant ω_D al curbei D este dat de formula :

$$(4.16.3) \quad \omega_D \cong \omega_X \otimes \omega_X^{-1} \otimes \mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_D.$$

Șirul exact $0 \rightarrow \omega_X \rightarrow O_X \rightarrow O_D \rightarrow 0$ pune în evidență șirul exact de coomologie :

$$(4.16.4) \quad 0 \rightarrow \Gamma(X, \omega_X) \rightarrow \Gamma(X, O_X) \rightarrow \Gamma(D, O_D) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(X, \omega_X) = 0 \rightarrow H^1(X, O_X) \rightarrow H^1(D, O_D) \rightarrow 0.$$

care arată că $r_v(1) = \dim H^1(D, O_D) = \dim \Gamma(D, O_D) > 0$ (folosind dualitatea pe D).

Reciproc, presupunem că (Y, y) este o singularitate normală astfel încît, dacă $f: X \rightarrow Y$ este desingularizarea sa minimală, atunci există un divizor efectiv $D > 0$ de suport egal cu E , al cărui fascicul dualizant ω_D este trivial. Vom demonstra că atunci (Y, y) este singularitate Gorenstein. Într-adevăr, șirul exact (cu $I = O_X(-D)$)

$$0 \rightarrow \omega_X \rightarrow \omega_X \otimes I^{-1} \rightarrow \omega_D \cong O_D \rightarrow 0$$

induce șirul exact de coomologie :

$$\Gamma(X, \omega_X \otimes I^{-1}) \rightarrow \Gamma(D, O_D) \rightarrow H^1(X, \omega_X) = 0 \quad ((4.11)).$$

Rezultă că există o secțiune $s \in \Gamma(X, \omega_X \otimes I^{-1})$ astfel încît $s/D = 1$. Cum $\text{Supp}(D) = E$ deducem că într-o vecinătate U de forma $U = f^{-1}(V)$, cu V vecinătate deschisă afină convenabilă a lui y în Y , avem $\omega_X/U \cong O_X(-D)/U$. Deoarece putem presupune că $V - y$ este nesingulară și $U - E \cong V - y$, rezultă că $\Omega_{Y/k}^2/V - y \cong O_Y/V - y$. După (3.13), (Y, y) este atunci singularitate Gorenstein.

Dacă $D' > 0$ este un alt divizor strict pozitiv cu $\text{Supp}(D') = E$ și al cărui fascicul dualizant $\omega_{D'}$ este trivial, atunci argumentul de mai sus arată că, cel puțin într-o vecinătate a lui E , avem $\omega_X \cong O_X(-D')$, de unde $O_X(D) \cong O_X(D')$. Deoarece suporturile lui D și D' sînt E și matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, acest izomorfism implică deja $D = D'$. În fine, ținînd cont de (3.31), discuția de mai sus conduce la :

(4.17) TEOREMĂ. Fie (Y, y) o singularitate normală de dimensiune 2 astfel încît y nu este punct regulat pe Y , și fie $f: X \rightarrow Y$ desingularizarea minimală a lui (Y, y) cu $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ de componente ireductibile E_1, \dots, E_n . Atunci (Y, y) este singularitate Gorenstein dacă și numai dacă una din următoarele două situații are loc :

i) (Y, y) este punct rațional dublu.

ii) Există un divizor strict pozitiv $D > 0$ astfel încît $\text{Supp}(D) = E$ și al cărui fascicul dualizant ω_D este trivial.

În plus, dacă ii) are loc, divizorul D este unic determinat de faptul că ω_D este trivial, $r_y(1) = \dim \Gamma(D, O_D)$ și $\omega_X \cong f^*(\omega_Y) \otimes O_X(-D)$.

Divizorul D din situația ii) a teoremei (4.17) merită poate numele de divizorul Gorenstein al singularității (Y, y) . În situația i) putem considera că divizorul Gorenstein este nul.

(4.18) COROLAR. a) Dacă (Y, y) este o singularitate rațională Gorenstein, atunci multiplicitatea lui (Y, y) este ≤ 2 .

b) Dacă (Y, y) este o singularitate rațională al cărei inel local $O_{Y,y}$ este factorial, atunci multiplicitatea lui (Y, y) este ≤ 2 .

Demonstrație. Prima afirmație rezultă direct din teorema (4.17) deoarece în situația ii) $r_y(1) = \dim \Gamma(D, O_D) > 0$. A doua afirmație rezultă din prima via teorema lui Murthy (3.14). Q.E.D.

Următorul rezultat reprezintă o caracterizare a punctelor raționale duble.

(4.19) COROLAR. Dacă $f: X \rightarrow Y$ este desingularizarea minimală a singularității normale de dimensiune 2 (Y, y) (cu y punct care nu este regulat pe Y), următoarele afirmații sînt echivalente:

a) (Y, y) este punct rațional dublu.

b) (Y, y) este singularitate Gorenstein și $f_*(\omega_X) \cong \omega_Y$.

c) (Y, y) este singularitate rațională Gorenstein.

Demonstrație. Echivalența dintre a) și b) a fost deja formulată în (4.18). Pe de altă parte, observăm că după (4.12), (Y, y) este singularitate rațională dacă și numai dacă $\Gamma(X - E, \omega_X) = \Gamma(X, \omega_X)$, fapt ce se mai poate scrie folosind (3.12), $f_*(\omega_X) \cong \omega_Y$ (anume, $\Gamma(X - E, \omega_X) \cong \Gamma(Y - y, \omega_Y) \stackrel{(3,12)}{=} \Gamma(Y, \omega_Y)$). De aici rezultă echivalența dintre b) și c).

(4.20) COROLAR. În ipotezele și notațiile teoremei (4.17), presupunem că are loc situația ii). Atunci pentru orice $q \geq 1$ are loc formula:

$$r_y(q) = - (D^2) \cdot q(q-1)/2 + r_y(1).$$

Demonstrație. Micșorînd eventual pe Y , putem presupune că $\omega_X = O_X(-D)$, unde $f: X \rightarrow Y$ este desingularizarea minimală a lui (Y, y) . Șirul exact

$$0 \rightarrow \omega_X^q \rightarrow \omega_X \otimes O_X(qD) = \omega_X^{1-q} \rightarrow \omega_{qD} \rightarrow 0$$

împreună cu (4.14) arată că $\dim H^1(X, \omega_X^{1-q}) = \dim H^1(qD, \omega_{qD})$, de unde folosind dualitatea pe curba qD , obținem $r_y(q) = \dim \Gamma(qD, O_{qD})$. Pe de altă parte, șirul exact

$$0 \rightarrow \omega_X^q \rightarrow O_X \rightarrow O_{qD} \rightarrow 0$$

și (4.14) implică $\dim H^1(qD, O_{qD}) = \dim H^1(X, O_X) = r_v(1)$. Calculînd genul aritmetic al lui qD și observînd că $-D$ este un divizor canonic pe X , avem :

$$1 - \chi(O_{qD}) = 1/2 (qD \cdot (q-1)D) + 1,$$

de unde concluzia corolarului (4.20).

(4.21) *Exemple de singularități Gorenstein neraționale.* O singularitate normală de dimensiune 2 (Y, y) se numește simplu-eliptică dacă în desingularizarea sa minimală $f: X \rightarrow Y$ fibra redusă $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ este o curbă nesingulară și eliptică. Astfel de singularități se pot obține în felul următor : fie E o curbă eliptică arbitrară și L un O_E -modul inversibil cu $\deg(L) > 0$ arbitrar. Punem $X = V(L)$ fibratul vectorial asociat lui E (vezi EGA II) și scufundăm pe E în X prin secțiunea nulă, astfel încît — după cum este imediat de văzut — fasciculul conormal al lui E în X este izomorf cu L . După criteriul de contractibilitate a lui Grauert (EGA II, § 8) există un morfism propriu $f: X \rightarrow Y$ ce contractă pe E la un punct normal $y \in Y$ și cu proprietatea că f este izomorfism între $X - E$ și $Y - y$. Atunci (Y, y) este o singularitate simplu-eliptică, iar $f: X \rightarrow Y$ este desingularizarea sa minimală.

Deoarece clasa canonică a unei curbe eliptice E este trivială, rezultă după teorema (4.17) că orice singularitate simplu-eliptică este singularitate Gorenstein, avînd drept divizor Gorenstein pe E .

(4.22) **TEOREMĂ.** Fie (Y, y) o singularitate normală a suprafeței afine Y astfel încît completatul m_y -adic al inelului local $O_{Y,y}$ să fie un inel factorial dar nu regulat. Atunci (Y, y) este punct rațional dublu, iar dacă $f: X \rightarrow Y$ este desingularizarea sa minimală, graful asociat fibrei reduse $E = f^{-1}(y)_{\text{red}}$ de componente E_1, \dots, E_n (cu $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2, i=1, \dots, n$) corespunde diagramei Dynkin (E_8) din teorema (3.32).

Demonstrația rezultă combinînd teorema (4.6), corolarul (4.18), teorema (3.32) și faptul imediat că dintre cele cinci diagrame Dynkin din (3.32) numai (E_8) verifică condiția că modulul dedeterminatului matricei $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este egal cu 1.

(4.23) *Referințe bibliografice.* Teorema (4.1) a fost demonstrată în cazul $k = \mathbb{C}$ de Laufer [1] și independent de Ramanujam [1] în cazul general. Demonstrația dată aici urmează ideea lui Lipman, cu o modificare făcută de autor pentru a o face valabilă în orice caracteristică. Lema (4.2), teorema (4.6) și corolarul (4.7) sînt luate din Lipman [1]. Teorema (4.9) împreună cu consecințele sale și teorema (4.17) au fost demonstrate de autor (cf. Bădescu [1]). Ideea folosirii invariantilor numerici $r_v(q)$ provine de la Laufer [1] și Knöller [1].

§ 5.

FORMULA LUI NOETHER, SCHEMA PICARD, VARIETATEA ALBANESE, PLURIGENURI

De acum încolo prin termenul „suprafață” vom înțelege o suprafață proiectivă și nesingulară X definită peste un corp algebric închis k de caracteristică arbitrară. Dacă vor apărea totuși și suprafețe cu singularități în anumite considerații, atunci acest lucru se va specifica (de exemplu: X este o suprafață normală ...).

Am văzut deja că dacă X este o suprafață și L un O_X -modul inversibil, atunci teorema Riemann-Roch se scrie:

$$\chi(L) = 1/2 (L \cdot L \otimes \omega_X^{-1}) + \chi(O_X).$$

Sub o formă mai precisă, teorema Riemann-Roch exprimă $\chi(O_X)$ în funcție de clasele Chern ale suprafeței X . Mai exact, are loc formula lui Noether:

$$(*) \quad \chi(O_X) = 1/12 (c_1^2 + c_2) = 1/12 ((K^2) + c_2).$$

unde K este clasa canonică a lui X (corespunzătoare O_X -modulului inversibil ω_X). În plus, c_2 se dovedește a fi caracteristica euleriană a suprafeței X și este dat de formula

$$(**) \quad c_2 = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4,$$

unde $b_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$ sînt numerele Betti ale suprafeței X . Dacă corpul de bază k este corpul numerelor complexe \mathbb{C} , atunci $b_i = \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathbb{C})$, $H^i(X, \mathbb{C})$ fiind grupul de coomologie singulară de dimensiune i al lui X cu coeficienți complecși. Dacă k este un

corp arbitrar, numerele Betti se pot defini cu ajutorul coomologiei l -adice (unde l este un număr prim diferit de caracteristica corpului de bază). Aceste numere nu depind de alegerea lui l , iar dacă $k = \mathbb{C}$, ele coincid cu numerele Betti clasice. Ca și în cazul topologiei algebrice clasice, în cazul general (k corp arbitrar) funcționează teorema de dualitate Poincaré, care afirmă că $b_i = b_{4-i}$, $i = 0, 1, 2$. Deci relația (***) devine, ținând cont că $b_0 = b_4 = 1$:

$$c_2 = 2 - 2b_1 + b_2.$$

Dacă notăm prin $q = \dim H^1(X, O_X)$, și $p_g = \dim H^2(X, O_X) = \dim H^0(X, \omega_X)$ irregularitatea și respectiv genul geometric ale lui X , atunci formula (*) devine, ținând cont de ultima relație:

$$12 - 12q + 12p_g = (K^2) + 2 - 2b_1 + b_2,$$

sau încă:

$$(***) \quad \begin{cases} 10 - 8q + 12p_g = (K^2) + b_2 + 2\Delta, \text{ unde} \\ \Delta = 2q - b_1. \end{cases}$$

Sub forma (***), formula lui Noether va fi utilizată în mod constant la clasificarea suprafețelor.

Pentru detalii privind formula lui Noether se poate consulta Borel-Serre [1] (împreună cu Grotendieck [2]), iar pentru detalii referitoare la numerele Betti, Igusa [1] și SGA 4^{1/2} (P. Deligne și al.).

Notăm acum prin $\text{Pic}(X)$ grupul lui Picard al suprafeței X , iar prin $\text{Pic}^0(X)$ (resp. $\text{Pic}^\tau(X)$) subgrupul lui $\text{Pic}(X)$ al tuturor claselor de izomorfisme de O_X -module inversibile algebrice (resp. numeric) echivalente cu zero. Amintim că două O_X -module inversibile L_1 și L_2 sînt algebric echivalente (și vom scrie $L_1 \approx L_2$) dacă există o schemă conexă T , două puncte închise t_1 și $t_2 \in T$ și un $O_{X \times T}$ -modul inversibil L astfel încît $L|_{X \times \{t_1\}} \cong L_1$ și $L|_{X \times \{t_2\}} \cong L_2$, iar un O_X -modul inversibil L' este algebric echivalent cu zero dacă $L' \approx \approx O_X$. De asemenea, L_1 și L_2 sînt numeric echivalente (și scriem $L_1 \approx \approx L_2$) dacă pentru orice curbă integră C de pe X avem $(L_1 \cdot C) = (L_2 \cdot C)$, iar L' este numeric echivalent cu zero dacă $L' \approx \approx O_X$.

Data fiind suprafața X (sau orice altă varietate proiectivă și nesingulară), considerăm atunci functorul lui Picard

$$\text{Pic}_X : \text{Sch}_k \rightarrow \text{Ens},$$

definit pe categoria Sch_k a tuturor k -schemelor algebrice (adică de tip finit peste k), cu valori în categoria Ens a mulțimilor în felul următor: dacă $T \in \text{Sch}_k$ este o k -schemă algebrică, atunci $\text{Pic}_X(T)$

este mulțimea tuturor claselor de T -izomorfisme de $O_{X \times T}$ -module inversibile, două $O_{X \times T}$ -module inversibile L și L' fiind T -izomorfe dacă există un O_T -modul inversibil M astfel încît $L \cong L' \otimes p_2^*(M)$, unde p_2 este proiecția canonică a lui $X \times T$ pe T . Dacă $f: T' \rightarrow T$ este un morfism de k -scheme, atunci $\text{Pic}_X(f): \text{Pic}_X(T) \rightarrow \text{Pic}_X(T')$ se definește prin: $\text{Pic}_X(f)$ (clasa lui L) = clasa lui $(1_X \times f)^*(L)$ (deci Pic_X este un functor contravariant). Se observă imediat că Pic_X admite un subfunctor Pic_X^0 definit prin

$$\text{Pic}_X^0(T) = \{L \in \text{Pic}_X(T) \mid L_t = L/X \times \{t\} \approx O_X \text{ pentru orice } t \in T\}.$$

(Scrierea este ușor abuzivă). Atunci functorii Pic_X și Pic_X^0 sînt reprezentabili și perechile lor de reprezentare $(\underline{\text{Pic}}(X), L)$ și respectiv $(\underline{\text{Pic}}^0(X), L')$ au următoarele proprietăți:

$\underline{\text{Pic}}(X)$ este reuniunea disjunctă (topologică) a unei familii infinite de scheme proprii peste k . L este un fascicul inversibil pe $X \times \underline{\text{Pic}}(X)$, iar punctele raționale ale lui $\underline{\text{Pic}}(X)$ peste k sînt într-o bijecție naturală cu elementele grupului lui Picard $\text{Pic}(X)$ al lui X . $\underline{\text{Pic}}^0(X)$ este componenta conexă a lui 0 (0 fiind punctul lui $\underline{\text{Pic}}(X)$ corespunzător clasei fasciculului O_X prin bijecția de mai sus), și este o schemă proprie peste k . Fasciculul L' este restricția la $X \times \underline{\text{Pic}}^0(X)$ a lui L și este unic determinat abstractie făcînd de un $\underline{\text{Pic}}^0(X)$ -izomorfism. Dacă $M = L'/\{x_0\} \times \underline{\text{Pic}}^0(X)$, cu x_0 un punct închis fixat pe X , atunci înlocuind pe L' cu $L' \otimes p_2^*(M)^{-1}$, obținem o clasă de izomorfism canonică ce reprezintă clasa de $\underline{\text{Pic}}^0(X)$ -izomorfism a lui L' , iar un reprezentant L' din această clasă poartă numele de fascicul inversibil al lui Poincaré pe $X \times \underline{\text{Pic}}^0(X)$ (sau fibratul în drepte al lui Poincaré pe $X \times \underline{\text{Pic}}^0(X)$). Vedem deci că fibratul Poincaré L' este unic determinat abstractie făcînd de un izomorfism și este perfect caracterizat de proprietățile (care exprimă între altele faptul că perechea $(\underline{\text{Pic}}^0(X), L')$ reprezintă functorul Pic_X^0):

i) $L'/\{x_0\} \times \underline{\text{Pic}}^0(X) \cong O_{\underline{\text{Pic}}^0(X)}$ și pentru orice punct închis $a \in \underline{\text{Pic}}^0(X)$ (sau rațional peste k) O_X -modul inversibil $L'_a = L'/X \times \{a\}$ este algebric echivalent cu zero. Mai exact spus, asocierea $a \mapsto \text{clasa } (L'_a)$ definește bijecția între mulțimea punctelor închise ale lui $\underline{\text{Pic}}^0(X)$ și mulțimea $\text{Pic}^0(X)$ a claselor de izomorfism de O_X -module inversibile algebric echivalente cu zero, bijecție menționată deja mai sus.

ii) Dacă T este k -schemă algebrică arbitrară și L'' este un $O_{X \times T}$ -modul inversibil cu proprietățile $L''/\{x_0\} \times T \cong O_T$ și pentru

orice $t \in T$ O_X -modulul inversibil $L'_t = L''/X \times \{t\}$ este algebric echivalent cu zero, atunci există un unic morfism de k -scheme $f: T \rightarrow \text{Pic}^0(X)$ astfel încît L'' este izomorf cu $(1_X \times f^*)(L')$.

O altă proprietate remarcabilă a schemei $\text{Pic}^0(X)$ este aceea că spațiul tangent Zariski $T_{\text{Pic}^0(X),0}$ al lui $\text{Pic}^0(\bar{X})$ în origine este canonic izomorf cu k -spațiul vectorial $H^1(X, O_X)$.

Deoarece functorul $\mathcal{P}ic_X^0$ ia de fapt valori chiar în categoria grupurilor abeliene (structura de grup abelian pe $\mathcal{P}ic_X^0(T)$ fiind indusă de produsul tensorial de $O_{X \times T}$ -module inversibile), atunci schema $\text{Pic}^0(X)$ este de fapt o schemă în grupuri comutative. Dacă $\text{Pic}^0(X)$ este schemă redusă, atunci $\text{Pic}^0(X)$ are deci o structură de varietate abeliană. O teoremă a lui Cartier (vezi Mumford [1], lecția 25) afirmă că în cazul cînd caracteristica lui k este zero, atunci orice schemă în grupuri comutative este redusă.

În cele ce urmează vom numi schema lui Picard a varietății X schema în grupuri $\text{Pic}^0(X)$, iar varietatea lui Picard clasică a lui X , grupul algebric comutativ $\text{Pic}^0(X)_{\text{red}}$ (în care operația este indusă de operația de schemă în grupuri $\text{Pic}^0(X)$). După cum am mai menționat deja, dacă X este o varietate proiectivă și nesingulară, schema $\text{Pic}^0(X)$ este proprie peste k , deci varietatea lui Picard a lui X este varietate abeliană în acest caz. Functorul $\mathcal{P}ic_X^0$ este însă reprezentabil și în cazul cînd X nu este regulată (dar X proiectivă), însă $\text{Pic}^0(X)$ poate să nu fie schemă proprie peste k . Acesta este cazul curbilor algebrice cu singularități.

Referințe pentru faptele enumerate mai sus fără demonstrații sînt următoarele: Grothendieck [3] (pentru teoria generală a schemei Picard), Mumford [1] (pentru schema Picard a unei suprafețe), Mumford [2] (pentru schema Picard a unei varietăți abeliene), Serre [3] și Oort [1] (pentru schema Picard a unei curbe cu singularități).

(5.1) TEOREMĂ. Dacă X este o suprafață, atunci are loc formula lui Noether

$$10 - 8q + 12p_g = (K^2) + b_2 + 2\Delta,$$

unde $\Delta = 2q - b_1 = 2(q-s)$, cu $q = \dim H^1(X, O_X)$, s —dimensiunea varietății lui Picard clasice a lui X . În plus, $\Delta = 0$ dacă caracteristica lui k este zero, iar în cazul cînd caracteristica lui k este pozitivă avem inegalitățile $0 \leq \Delta \leq 2p_g$.

Demonstrație. Din definiția lui b_1 avem:

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{b_1} &= H_{\text{ét}}^1(X, \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}) = \{a \in \text{Pic}(X) \mid l \cdot a = 0\} = \\ &= \{a \in \text{Pic}^0(X) \mid l \cdot a = 0\} = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{2s}, \end{aligned}$$

deoarece $\text{Pic}^0(X)$ este grupul abelian subiacent varietății lui Picard a lui X , care este varietate abeliană de dimensiune s , și se aplică următoarea proprietate elementară de varietăți abeliene: mulțimea punctelor de ordin l (cu l prim cu $p = \text{car}(k)$) ale varietății abeliene A de dimensiune s este într-o bijecție naturală cu $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{2s}$ (vezi Mumford [2], § 6, prop. 2). Deducem deci că $b_1 = 2s$ (aceasta este tocmai definiția lui b_1 dată de Igusa în [1]). Deci

$$\Delta = 2q - b_1 = 2(q - s) \geq 0,$$

deoarece q este dimensiunea spațiului tangent în origine la schema $\text{Pic}^0(X)$ de dimensiune s . Relația de mai sus se mai poate scrie :

$$\Delta = 2(\dim T_{\text{Pic}^0(X),0} - \dim T_{\text{Pic}^0(X)_{\text{red}},0}).$$

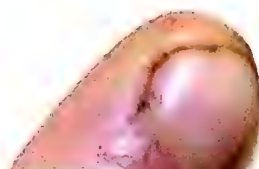
Însă legătura dintre aceste două spații tangente este făcută prin intermediul operațiilor Bockstein (vezi Mumford [1], lecția 27) și avem :

$$\begin{aligned} q-s &= \dim T_{\text{Pic}^0(X),0} - \dim T_{\text{Pic}^0(X)_{\text{red}},0} = \\ &= \dim H^1(X, O_X) - \dim \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \text{Ker}(\beta_i) \right) \leq \\ &\leq \dim \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{Im}(\beta_i) \right) \leq \dim H^2(X, O_X) = p_g, \end{aligned}$$

cu β_i operatorii Bockstein pe X , de unde obținem inegalitățile dorite în legătură cu Δ . Faptul că în caracteristică zero $\Delta = 0$ rezultă din teorema lui Cartier, iar formula lui Noether din (***) . Q.E.D.

(5.2) DEFINIȚIE. Fie X o varietate proiectivă și nesară și $x_0 \in X$ un punct închis fixat. O pereche (A, α) formată dintr-o varietate abeliană A și un morfism $\alpha: X \rightarrow A$ astfel încît $\alpha(x_0) = 0$ (elementul nul al lui A), poartă numele de *varietate Albanese* a varietății X dacă pentru orice morfism $f: X \rightarrow B$ astfel încît B este varietate abeliană și $f(x_0) = 0$, există un unic omomorfism $g: A \rightarrow B$ de varietăți abeliene astfel încît $g \circ \alpha = f$.

În legătură cu această definiție este de remarcat rezultatul elementar care afirmă că orice morfism $g': A \rightarrow B$ între două varietăți abeliene A și B este de forma $g' = g + b$, unde $g: A \rightarrow B$ este un omomorfism de varietăți abeliene și $b = g'(0) \in B$. Rezultă atunci imediat că definiția (5.2) putea fi dată și fără a se utiliza punctul x_0 în felul următor: perechea (A, α) formată din varietatea abeliană A și morfismul $\alpha: X \rightarrow A$ se numește *varietate Albanese* a lui X dacă pentru orice alt morfism $f: X \rightarrow B$ într-o varietate abeliană B există un unic morfism $g: A \rightarrow B$ astfel încît $g \circ \alpha = f$. De aici rezultă că orice două varietăți Albanese ale lui X sînt canonic



izomorfe, și, în particular, că varietatea Albanese a lui X nu depinde (modulo un izomorfism) de alegerea punctului bază x_0 . Într-un mod ușor abuziv vom nota prin $(\text{Alb}(X), \alpha)$ varietatea Albanese a varietății (proiective și nesingulare) X .

Existența varietății Albanese a unei varietăți proiective și nesingulare X este demonstrată în Serre [4] folosindu-se metode destul de elementare. În continuare vom indica un argument rapid care probează nu numai existența varietății Albanese $\text{Alb}(X)$ ci și raportul în care se află ea față de varietatea lui Picard (clasică) a lui X . Vom folosi însă teoria schemei Picard.

Fie B o varietate abeliană. Din Mumford [2] rezultă că schema sa Picard $\hat{B} = \text{Pic}^0(B)$ este totdeauna redusă, deci varietate abeliană. De aici rezultă că $\dim(\hat{B}) = \dim(T_{B,0}) = \dim H^1(B, \mathcal{O}_B) = \dim(B)$. În acest caz \hat{B} poartă numele de varietate abeliană duală varietății abeliene B (*loc. cit.*).

Dacă X este o varietate proiectivă și nesingulară arbitrară, atunci notînd prin $P(X) = \text{Pic}^0(X)_{\text{red}}$ varietatea lui Picard a lui X , există un morfism canonic

$$u_X: X \rightarrow (P(X))^{\wedge} = \underline{\text{Pic}}^0(P(X))$$

definit în felul următor. Fixăm un punct bază $x_0 \in X$, L' fibratul Poincaré pe $X \times \text{Pic}^0(X)$, L'' fibratul Poincaré pe $P(X) \times P(X)^{\wedge}$, L'_{red} restricția lui L' la subschema $X \times P(X)$ a lui $X \times \text{Pic}^0(X)$ și $v: P(X) \times X \rightarrow X \times P(X)$ morfismul $(a, b) \mapsto (b, a)$. Folosind proprietatea de universalitate a varietății abeliene duale $(P(X))^{\wedge}$, vedem că există un (unic) morfism canonic $u_X: X \rightarrow (P(X))^{\wedge}$ astfel încît

$$v^*(L'_{\text{red}}) = (1_{P(X)} \times u_X)^*(L'').$$

Un fapt remarcabil este acela că dacă X este varietate abeliană, atunci morfismul canonic $u_X: X \rightarrow (X^{\wedge})^{\wedge} = X^{\wedge \wedge}$ este un izomorfism (ceea ce justifică denumirea de varietate abeliană duală, în sensul că biduala unei varietăți abeliene trebuie să fie (canonic) izomorfă cu varietatea de plecare, vezi Mumford [2]).

Dacă X este o varietate proiectivă și nesingulară și x_0 un punct bază în X , atunci punem $\text{Alb}(X) = (P(X))^{\wedge}$ și $\alpha = u_X$ morfismul descris mai sus. Din construcție avem că $\alpha(x_0) = 0$. Se verifică acum fără nici un fel de dificultate (combinînd proprietăți de universalitate) că dacă $f: X \rightarrow B$ este un morfism cu valori în varietatea abeliană B astfel încît $f(x_0) = 0$, atunci omomorfismul $g = (P(f))^{\wedge}: \text{Alb}(X) \rightarrow \text{Alb}(B) = B^{\wedge \wedge}$ are proprietatea că $g \circ u_X = u_B \circ f$ și este unic cu această proprietate, unde $P(f): P(B) \rightarrow$

→ $P(X)$ este morfismul indus de f la varietățile Picard. Cum am remarcat deja că u_B este izomorfism, rezultă într-adevăr că $(P(X)^\wedge, u_X)$ este varietatea Albanese pentru varietatea X .

În acest mod am demonstrat:

(5.3) TEOREMĂ. Dacă X este o varietate proiectivă și nesingulară, atunci varietatea Albanese $(\text{Alb}(X), \alpha)$ există și este unică abstracție făcînd de un izomorfism, iar $\text{Alb}(X)$ coincide cu duala varietății lui Picard $P(X)$ a lui X . În particular, dacă X este suprafață, dimensiunea varietății $\text{Alb}(X)$ este (în notațiile teoremei (5.1)) egală cu $s = \dim(P(X))$ și deci $\dim(\text{Alb}(X)) \leq q$. În plus avem egalitate dacă și numai dacă $\Delta = 0$ (de exemplu dacă $\text{car}(k) = 0$ sau dacă $p_g = 0$).

Este de remarcat că dacă X este o curbă proiectivă și nesingulară, atunci schema Picard $\text{Pic}^0(X)$ este totdeauna redusă și deci coincide cu varietatea lui Picard a lui X . Mai mult, în acest caz varietatea abeliană $P(X)$ este izomorfă cu duala sa, de unde deducem că $\text{Alb}(X)$ (care în acest caz mai poartă și numele de jacobiana curbei X) este izomorfă cu $P(X)$.

În continuare vom mai folosi următoarele notații. Prin $NS(X)$ vom nota grupul factor $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$, care poartă numele de grupul Néron-Severi al varietății proiective și nesingulare X . O teoremă demonstrată de Severi în caracteristică zero și ulterior de Néron în caracteristică arbitrară afirmă că acest grup este finit generat, iar rangul său ρ mai poartă numele de numărul bază al lui X . O inegalitate a lui Igusa afirmă că $\rho \leq b_2$ (cf. Grothendieck și al. [1]; peste corpul complex acest rezultat este elementar, deoarece se demonstrează fără multe dificultăți, că $\rho \leq \dim H^1(X, \Omega_{X/k}^1)$ dacă $\text{car}(k) = 0$, a se vedea Hartshorne [1], pag. 368, exercițiul 1.8, pentru cazul cînd X este o suprafață).

(5.4) Fie acum X o varietate proiectivă și nesingulară și L un \mathcal{O}_X -modul inversibil. Lui L i se poate asocia k -algebra graduată $\Gamma_*(L) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^0(X, L^n)$, în care partea omogenă de grad n este $H^0(X, L^n)$, și în care înmulțirea dintre $s \in H^0(X, L^m)$ și $s' \in H^0(X, L^n)$ ($m, n \geq 0$) este dată de $s \cdot s' = s \otimes s' \in H^0(X, L^{m+n})$. Este clar că dacă $s \otimes s' = 0$, atunci $s = 0$ sau $s' = 0$, și deci $\Gamma_*(L)$ este un domeniu de integritate. În plus, $\Gamma_*(L)$ conține pe $k = H^0(X, L^0) = H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Are deci sens să vorbim despre gradul de transcendență $\lambda(L)$ al lui $\Gamma_*(L)$ peste k .

(5.5) LEMĂ. Au loc inegalitățile $0 \leq \lambda(L) \leq \dim(X) + 1$. Dacă în plus L este amplu $\lambda(L) = \dim(X) + 1$ și pentru n suficient de mare $\Gamma_*(L^n)$ este o k -algebră de tip finit.

Demonstrație. Fie H un divisor efectiv foarte amplu pe X astfel încît $L' = L \otimes O_X(H)$ să fie amplu (cf. EGA II). Corespunzător lui H obținem un omomorfism injectiv $L \hookrightarrow L'$ care induce un omomorfism injectiv $\Gamma_*(L) \rightarrow \Gamma_*(L')$ de k -algebre, de unde $\lambda(L) \leq \lambda(L')$. În acest mod vedem că este suficient să demonstrăm afirmația a doua. Fie deci L amplu. Observăm că pentru orice $n > 0$, extinderea de inele $\Gamma_*(L^n) \subset \Gamma_*(L)$ are proprietatea că orice element omogen din $\Gamma_*(L)$ ridicat la puterea n aparține lui $\Gamma_*(L^n)$, de unde deducem egalitatea $\lambda(L) = \lambda(L^n)$. Cu această observație, putem presupune L foarte amplu, și fie atunci $X \hookrightarrow P^m$ o scufundare a lui X într-un spațiu proiectiv astfel încît $L \cong O_X(1)$. Atunci omomorfismul Serre

$$\alpha : S(X) \rightarrow \Gamma_*(L)$$

este un TN -izomorfism, unde $S(X)$ este inelul de coordonate omogene al lui X în P^m (vezi EGA III 2.3.1). Prin urmare pentru n suficient de mare compunerea dintre imersia $X \hookrightarrow P^m$ și imersia Veronese $P^m \hookrightarrow P^{N(n)}$, cu $N(n) = \binom{m+n}{n} - 1$, are proprietatea că omomorfismul

Serre asociat este chiar un izomorfism. Atunci a doua afirmație a lemei (5.5) este clară deoarece inelul de coordonate omogene al lui X în $P^{N(n)}$ este o k -algebră finit generată de grad de transcendență egal cu $\dim(X) + 1$. Q.E.D.

(5.6) DEFINIȚIE. Dacă X este o varietate proiectivă și nesingulară de dimensiune $d \geq 1$, atunci $\Gamma_*(\omega_X)$, unde $\omega_X = \Omega_{X/k}^d$, poartă numele de *inelul canonic* al lui X și în continuare va fi notat cu $R(X)$. Numărul $c(X) = \lambda(\omega_X) - 1$ poartă numele de *dimensiunea canonică* a lui X , iar $p_n = p_n(X) = \dim H^0(\omega_X^n)$ ($n \geq 1$) poartă numele de *n -genul* (sau plurigenul de ordin n) al lui X .

Din (5.5) rezultă că $-1 \leq c(X) \leq \dim(X)$, iar $c(X) = -1$ dacă și numai dacă $p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$. Dacă X este suprafață, p_1 coincide cu genul geometric p_g al lui X .

(5.7) PROPOZIȚIE. Dacă X și Y sînt două suprafețe și $u : X \rightarrow Y$ este o aplicație birațională, atunci u induce un izomorfism $u^* : R(Y) \rightarrow R(X)$ de k -algebre graduate. În particular, pentru orice $n \geq 1$, n -genul p_n este un invariant numeric birațional.

Demonstrație. Ținînd cont de structura aplicațiilor biraționale între două suprafețe (ca o compunere de transformări pătratice sau de inverse de acestea), ne reducem imediat la cazul cînd u este transformarea pătratică a lui Y de centru y . Atunci, notînd prin $E = u^{-1}(y)$, avem formula :

$$\omega_X \cong u^*(\omega_Y) \otimes O_X(E),$$

de unde, pentru orice $n \geq 1$,

$$\omega_X^n = u^*(\omega_Y^n) \otimes O_X(nE).$$

Folosind formula proiecției avem $u_*(\omega_X^n) \cong \omega_Y^n \otimes u_*O_X(nE) \cong \omega_Y^n$, deoarece $u_*O_X(nE) \cong O_X$ (imediat de probat prin inducție după n , vezi (4.13)). Deci $H^0(Y, u_*\omega_X^n) \cong H^0(Y, \omega_Y^n)$, sau încă, $H^0(X, \omega_X^n) \cong H^0(Y, \omega_Y^n)$. Q.E.D.

(5.8) *Exemple.* 1) Fie X o curbă proiectivă și nesingulară de gen g . Atunci :

a) $g = 0$ implică $X = P^1$, $\omega_X = O(-2)$, $R(X) = k$, $c(X) = -1$, $p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

b) $g = 1$ implică $\omega_X \cong O_X$, $c(X) = 0$, $p_n = 1$ pentru orice $n \geq 1$.

c) $g \geq 2$ implică $\deg(\omega_X) = 2g - 2 > 0$, deci ω_X amplu și $c(X) = 1$.

ii) Fie $X = C_1 \times C_2$ produsul a două curbe proiective și nesingulare de genuri g_1 și g_2 respectiv. Atunci $\omega_X \cong p_1^*(\omega_{C_1}) \otimes p_2^*(\omega_{C_2})$, unde p_1 și p_2 sînt proiecțiile lui X pe C_1 și C_2 respectiv. Deci : $H^0(\omega_X^n) = H^0(\omega_{C_1}^n) \otimes H^0(\omega_{C_2}^n)$, $n > 0$, și avem :

a) $g_1 = 0$ sau $g_2 = 0$ implică $c(X) = -1$.

b) $g_1 = g_2 = 1$ implică $c(X) = 0$.

c) $g_1 \geq 2$ și $g_2 = 1$, sau $g_1 = 1$ și $g_2 \geq 2$ implică $c(X) = 1$.

d) $g_1 \geq 2$ și $g_2 \geq 2$ implică $c(X) = 2$.

Justificarea acestor afirmații este simplă și decurge din următoarea leamnă elementară :

(5.9) LEMĂ. Fie B o curbă proiectivă și nesingulară și M un O_B -modul inversibil. Atunci :

i) $\dim H^0(B, M^n) = n \deg(M) + \text{const.}$, dacă $\deg(M) \geq 1$ și $n \geq 0$.

ii) $\dim H^0(B, M^n) = 1$ dacă $M^n \cong O_B$.

iii) $\dim H^0(B, M^n) = 0$ dacă $\deg(M) < 0$ sau dacă $\deg(M) = 0$, $n \geq 1$ și $M^n \not\cong O_B$.

(5.10) *Observații.* Fie X o suprafață.

a) Dacă există un $n \geq 1$ astfel încît $p_n \geq 2$, atunci $c(X) \geq 1$.

b) Dacă $p_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$, atunci $c(X) \leq 0$. În plus, $c(X) = 0$ dacă și numai dacă $p_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$ și $p_n = 1$ pentru un $n \geq 1$.

Demonstrație. Dacă demonstrăm a), atunci b) este evidentă. Fie deci α și $\beta \in H^0(X, \omega_X^n)$ două secțiuni linear independente peste k . Atunci pentru orice $m \geq 1$, $\alpha^m, \alpha^{m-1}\beta, \dots, \beta^m \in H^0(X, \omega_X^{mn})$ sînt de asemenea linear independente peste k , deoarece dacă

$$(*) \quad \lambda_0 \alpha^m + \lambda_1 \alpha^{m-1} \beta + \dots + \lambda_m \beta^m = 0, \quad \lambda_i \in k,$$

atunci polinomul $P(U, V) = \lambda_0 U^m + \lambda_1 U^{m-1} V + \dots + \lambda_m V^m$ este de forma $P(U, V) = (\lambda U + \mu V)^m$ cu $\lambda, \mu \in k$ (deoarece k este algebric închis). Din (*) deducem deci $(\lambda \alpha + \mu \beta)^m = 0$, și deoarece $R(X)$ este domeniu de integritate, $\lambda \alpha + \mu \beta = 0$, adică $\lambda = \mu = 0$.

Rezultă că subalgebra lui $R(X)$ (peste k) generată de α și β este izomorfă cu algebra de polinoame $k[U, V]$, și deci $\deg \text{tr. } R(X) \geq \deg \text{tr. } k[U, V] = 2$, adică $c(X) \geq 1$. Q.E.D.

(5.11) *Referințe bibliografice.* Formula lui Noether se poate găsi în Borel-Serre [1]. Numerele Betti ale unei suprafețe algebrice abstracte au fost pentru prima dată definite de Igusa (cf. Igusa [1]); ulterior s-a constatat că ele pot fi introduse și cu ajutorul coomologiei etale (cf. Deligne și al. [1]). Detalii privind teoria schemei Picard se pot găsi în Grothendieck [3], Mumford [1] și [2], Serre [3] și Oort [1]. Construcția și proprietățile elementare ale varietății Albanese a unei varietăți algebrice se găsesc în Serre [4]. Inegalitatea Igusa-Severi este demonstrată în Igusa [1] sau Grothendieck și al. [1]. Inelul canonic al unei suprafețe a fost considerat pentru prima dată de Mumford [3].

§ 6.

EXISTENȚA MODELELOR MINIMALE

(6.1) DEFINIȚIE. Fie X o suprafață. Vom spune că X este *model minimal* dacă orice morfism birațional $f: X \rightarrow Y$, cu Y suprafață (tot proiectivă și nesingulară ca și X), este un izomorfism.

Din teorema de structură a morfismelor biraționale de suprafețe și din criteriul de contractibilitate al lui Castelnuovo (3.30) rezultă că X este suprafață minimală dacă și numai dacă X nu conține nici-o curbă excepțională de prima specie.

Scopul acestui paragraf este de a demonstra:

(6.2) TEOREMĂ. Fie $\sigma: X' \rightarrow X$ transformarea pătratică a suprafeței X de centru punctul x . Atunci $\dim H^1(X, \Omega_{X/k}^1) < \dim H^1(X', \Omega_{X'/k}^1)$.

(6.3) COROLAR. Orice suprafață X domină o suprafață minimală. În particular, orice clasă de izomorfism birațional de suprafețe conține cel puțin o suprafață minimală.

Demonstrația corolarului (6.3). Dacă X este suprafață minimală am terminat, iar dacă nu, X conține o curbă excepțională de prima specie E . Din (3.30) există o contracție $f_1: X \rightarrow X_1$, cu X_1 suprafață și f_1 transformarea pătratică a lui X_1 de centru un punct $x_1 \in X_1$. Dacă X_1 este suprafață minimală, am terminat, iar dacă nu, există o contracție $f_2: X_1 \rightarrow X_2$ a unei curbe excepționale de prima specie E_1 de pe X_1 , ș.a.m.d. Obținem deci un șir de transformări pătratice

$$X \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots$$

Trebuie arătat că acest șir este finit. În caz contrar, aplicând teorema (6.2) obținem:

$$\dim H^1(X, \Omega_{X/k}^1) > \dim H^1(X_1, \Omega_{X_1/k}^1) > \dim H^1(X_2, \Omega_{X_2/k}^1) > \dots$$

lucru imposibil deoarece k -spațiul vectorial $H^1(X, \Omega_{X/k}^1)$ este finit dimensional. Q.E.D.

Demonstrația teoremei (6.2). Pasul 1. Fie $U = \text{Spec}(A) \subset X$ o vecinătate afină a punctului x astfel încît, notînd cu m idealul maximal al lui A corespunzător punctului x , m să fie generat de două elemente $u, v \in m$ (altfel spus, u și v reprezintă un sistem regulat de parametri în jurul punctului x). Atunci $\sigma^{-1}(U)$ admite o acoperire formată din deschișii afini $U_1 = \text{Spec}(A[v/u])$ și $U_2 = \text{Spec}(A[u/v])$. Fie $w_1 = v/u$ și $w_2 = u/v$. Atunci $U_1 \cap U_2 = \text{Spec}(B)$ cu $B = A[w_1, w_2]$ ($w_1 w_2 = 1$). Afirmăm că omomorfismul surjectiv de A -algebre $\varphi: A[T] \rightarrow A[w_1]$ care duce pe T în w_1 (T fiind o variabilă peste A) induce izomorfismul $A[T]/(uT - v) \cong A[w_1]$ (și asemănător pentru $A[w_2]$).

Într-adevăr, incluziunea $(uT - v) \subset \text{Ker}(\varphi)$ fiind evidentă, fie $f = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n \in A[T]$, cu $a_n \neq 0$, $n \geq 0$ și $f(w_1) = 0$. Dacă $n = \deg(f) = 0$, atunci $f = 0$, și deci putem presupune $n \geq 1$. Egalitatea $f(w_1) = 0$ arată că $a_n v^n = -u(a_0 u^{n-1} + a_1 u^{n-2} v + \dots + a_{n-1} v^{n-1})$ și deci în inelul local regulat $A_m = O_{x,x}$ u divide pe $a_n v^n$. Cum A_m este factorial și u nu divide pe v , rezultă că u divide pe a_n (de fapt u este un element prim în A_m), deci $a_n/u \in A_m$. Fie acum $m' \neq m$ un alt ideal maximal al lui A . Atunci cel puțin unul din elementele u, v este inversibil în $A_{m'}$. Dacă u este inversibil în $A_{m'}$, atunci $a_n/u \in A_{m'}$, iar dacă v este inversibil în $A_{m'}$, atunci egalitatea $a_n/u = -(v^n)^{-1}(a_0 u^{n-1} + a_1 u^{n-2} v + \dots + a_{n-1} v^{n-1})$ arată că din nou $a_n/u \in A_{m'}$ (pentru orice ideal maximal $m' \neq m$). Deducem că $a_n/u \in A$, deci există un $a' \in A$ astfel încît $a_n = ua'$. Atunci există un $g \in A[T]$ astfel încît $f = a' T^{n-1}(uT - v) + g$, cu $\deg(g) < \deg(f) = n$ și $g(w_1) = 0$. Prin ipoteza de inducție g este multiplu de $(uT - v)$, de unde rezultă că și f este multiplu de $uT - v$.

Pasul 2. Omomorfismul canonic $\Omega_X^1 \rightarrow \sigma_ \Omega_{X'}^1$, (unde am notat mai simplu $\Omega_X^1 = \Omega_{X/k}^1$) este surjectiv, avînd nucleul de suport conținut în $\{x\}$. (De fapt acest omomorfism este chiar un izomorfism, însă nu avem nevoie de această informație în plus.)*

Demonstrația pasului 2. Din faptul că σ este izomorfism în afara lui $E = \sigma^{-1}(x)$ rezultă imediat că suportul nucleului omomorfismului de la pasul 2 este conținut în $\{x\}$. Rămîne deci de probat surjectivitatea acestui omomorfism. Problema fiind locală în jurul lui x , putem presupune $X = U = \text{Spec}(A)$ ca la pasul 1. Atunci $X' = U_1 \cup U_2$. A ne da o formă diferențială $\omega \in \Gamma(X, \sigma_*(\Omega_{X'}^1)) = \Gamma(X', \Omega_{X'}^1)$ revine la a ne da două forme diferențiale $\omega_1 \in \Gamma(U_1, \Omega_{X'}^1)$ și $\omega_2 \in \Gamma(U_2, \Omega_{X'}^1)$ cu proprietatea $\omega_1|_{U_1 \cap U_2} = \omega_2|_{U_1 \cap U_2}$. Însă

deoarece $U_1 = \text{Spec}(A_1)$, $U_2 = \text{Spec}(A_2)$, $U_1 \cap U_2 = \text{Spec}(B)$, cu $A_1 = A[w_1]$, $A_2 = A[w_2]$ și $B = A[w_1, w_2]$, putem scrie :

$$(*) \quad \begin{cases} \omega_1 = \sum_i b'_i da'_i + f_1(w_1) dw_1 \\ \omega_2 = \sum_j b''_j da''_j + f_2(w_2) dw_2 \end{cases}$$

cu $a'_i, a''_j \in A$, $b'_i \in A_1$, $b''_j \in A_2$, $f_1, f_2 \in A[T]$. În plus, ω_1 și ω_2 au imagini egale în $\Omega_B = \Omega_{B/k}^1$.

Dacă \bar{f}_1 și \bar{f}_2 sînt reducerile lui f_1 și f_2 respectiv modulo idealul m , atunci $\omega_1/E \cap U_1 = \bar{f}_1(T) \cdot dT$, $\omega_2/E \cap U_2 = \bar{f}_2(T') \cdot dT'$, cu T și T' coordonate neomogene pe $E = P^1$ astfel încît $T \cdot T' = 1$. Cum cele două restricții la E coincid pe intersecția $E \cap U_1 \cap U_2$, ele definesc o formă diferențială $\omega' \in \Gamma(E, \Omega_E^1)$. Cum însă $\Omega_E^1 \cong \mathcal{O}_E(-2)$ și $\mathcal{O}_E(-2)$ nu are secțiuni globale, rezultă $\bar{f}_1 = \bar{f}_2 = 0$. Altfel spus, toți coeficienții lui f_1 și f_2 aparțin idealului m . Însă deoarece $mA_1 = uA_1$, putem scrie $f_1(w_1) dw_1 = g_1(w_1) \cdot u \cdot dw_1 = g_1(w_1) \cdot dv - g_1(w_1) \cdot w_1 \cdot du$, cu $g_1 \in A_1[T]$. În definitiv am demonstrat că, fără a restrînge generalitatea, putem în (*) presupune că $f_1 = f_2 = 0$, deci :

$$(**) \quad \begin{cases} \omega_1 = \sum_i b'_i da'_i, & a'_i \in A, b'_i \in A_1 \\ \omega_2 = \sum_j b''_j da''_j, & a''_j \in A, b''_j \in A_2. \end{cases}$$

Acum amintim următoarele fapte generale elementare :

a) Dacă C este o k -algebră și T este o nedeterminată peste C , atunci are loc șirul exact :

$$0 \rightarrow \Omega_C \otimes_C C[T] \rightarrow \Omega_{C[T]} \rightarrow \Omega_{C[T]/C} \rightarrow 0$$

($\Omega_C = \Omega_{C/k}^1$), și deoarece $\Omega_{C[T]/C} = C[T] \cdot dT$, obținem izomorfismul :

$$\Omega_{C[T]} \cong (\Omega_C \otimes_C C[T]) \oplus C[T] \cdot dT$$

b) Dacă I este un ideal în C astfel încît C și C/I să aibă toate localizatele regulate, atunci are loc șirul exact canonic :

$$0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow \Omega_C \otimes_C C/I \rightarrow \Omega_{C/I} \rightarrow 0.$$

c) Dacă S este un sistem multiplicativ închis în C , atunci are loc un izomorfism canonic $\Omega_{S^{-1}C} = S^{-1}\Omega_C$.

Folosind pasul 1 și aceste trei fapte generale (în situația $A[w_1] = A[T]/I$, cu $I = (uT - v)A[T]$ și $B = A[w_1, w_1^{-1}]$), obținem izomorfismul:

$$\Omega_B \cong \frac{(\Omega_A \otimes_A B) \oplus B \cdot dw_1}{B \cdot (w_1 \cdot du + u \cdot dw_1 - dv)},$$

unde $B \cdot dw_1$ este un B -modul liber de rang 1. De aici rezultă că omomorfismul natural $\Omega_A \otimes_A B \rightarrow \Omega_B$ este injectiv. Deoarece însă $\sigma_* O_{X'} = O_X$, are loc șirul exact de A -module:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0,$$

unde $\varphi(a) = (a, a)$ și $\psi(a_1, a_2) = a_1 - a_2$ (de fapt relația $\sigma_* O_{X'} = O_X$ probează incluziunea $\text{Ker}(\psi) \subseteq \text{Im}(\varphi)$, și cum incluziunea contrară este evidentă, avem $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$; surjectivitatea lui ψ rezultă imediat din faptul că $B = A[w_1, w_2]$ cu $w_1 w_2 = 1$). Tensorizînd acest șir exact cu Ω_A , obținem șirul exact:

$$\Omega_A \xrightarrow{\varphi \otimes 1} (A_1 \otimes_A \Omega_A) \oplus (A_2 \otimes_A \Omega_A) \xrightarrow{\psi \otimes 1} B \otimes_A \Omega_A \rightarrow 0.$$

Deoarece (**) arată că $(\omega_1, \omega_2) \in \text{Ker}(\psi \otimes 1) = \text{Im}(\varphi \otimes 1)$ (am folosit injectivitatea lui $\Omega_A \otimes_A B \rightarrow \Omega_B$), rezultă că există $\omega \in \Omega_A$ astfel încît $(\varphi \otimes 1)(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ și demonstrația pasului 2. este completă.

Pasul 3. Considerăm șirul spectral Leray:

$$E_2^{pq} = H^p(X, R^q \sigma_*(\Omega_{X'}^1)) \Rightarrow H^{p+q}(X', \Omega_{X'}^1).$$

Seriînd o parte din șirul exact în grade mici asociat acestui șir spectral avem șirul exact:

$$0 \rightarrow H^1(X, \sigma_*(\Omega_{X'}^1)) \rightarrow H^1(X', \Omega_{X'}^1) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, R^1 \sigma_*(\Omega_{X'}^1)).$$

Din pasul 2 rezultă că omomorfismul canonic $H^1(X, \Omega_X^1) \rightarrow H^1(X, \sigma_*(\Omega_{X'}^1))$, indus de omomorfismul (surjectiv și de suport cel mult finit), $\Omega_X^1 \rightarrow \sigma_*(\Omega_{X'}^1)$, este un izomorfism.

Demonstrația teoremei (6.2) se încheie dacă probăm:

Pasul 4. Omomorfismul α este netrivial.

Mai întâi observăm că deoarece $R^1\sigma_*(\Omega_{X'}^1)$ este fasciculul asociat prefasciculului $U \mapsto H^1(\sigma^{-1}(U), \Omega_{X'}^1)$, aplicația α este tocmai aplicația de la prefascicul la fasciculul său asociat. Deoarece orice element din $H^0(X, R^1\sigma_*(\Omega_{X'}^1)) = (R^1\sigma_*\Omega_{X'}^1)_x$ provine dintr-un element din $H^1(\sigma^{-1}(U), \Omega_{X'}^1)$, cu U vecinătate convenabilă a lui x în X , și deoarece avem aplicația naturală de restricție

$$\text{res} : H^1(\sigma^{-1}(U), \Omega_{X'}^1) \rightarrow H^1(E, \Omega_E^1),$$

obținem omomorfismul natural

$$\beta : H^0(X, R^1\sigma_*(\Omega_{X'}^1)) \rightarrow H^1(E, \Omega_E^1).$$

Ca să demonstrăm pasul 4 va fi suficient să dovedim că omomorfismul natural $\beta \circ \alpha$ este netrivial. În acest scop considerăm diagrama comutativă :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(X') & \xrightarrow{\gamma} & H^1(X', \Omega_{X'}^1) \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \beta \circ \alpha \\ \text{Pic}(E) & \xrightarrow{\gamma'} & H^1(E, \Omega_E^1) \end{array}$$

unde prima săgeată orizontală este dată de $\gamma(\xi) =$ clasa de coomologie a 1-cociclului $\{d\xi_{ij}/\xi_{ij}\}_{i,j} \in Z^1(\mathcal{U}, \Omega_{X'}^1)$, unde $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ este o acoperire deschisă a lui X' în care ξ este reprezentat de 1-cociclul $\{\xi_{ij}\}_{i,j} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{X'}^*)$. Fie atunci $\xi \in \text{Pic}(X')$ clasa de coomologie asociată curbei excepționale E de pe X' . Atunci $(\beta \circ \alpha)(\gamma(\xi)) = \gamma'(\text{res}(\xi))$. Însă restricția lui ξ la E este (unica) fibrare din $\text{Pic}(E)$ de grad -1 (ținem cont de relația $(E^2) = -1$). Dacă dovedim că $\gamma'(\text{res}(\xi)) \neq 0$ teorema va fi demonstrată. Însă, după cum rezultă imediat din definiții, $\gamma'(\text{res}(\xi))$ este clasa de coomologie din $H^1(E, \Omega_E^1)$ reprezentată de 1-cociclul $dz/z = \eta_{12} \in Z^1(\{U'_1, U'_2\}, \Omega_E^1)$, cu U'_1, U'_2 acoperirea canonică a dreptei proiective, iar z o coordonată neomogenă pe P^1 . Cum $U'_1 \cong$ dreapta afină $\cong U'_2$, rezultă că dacă η_{12} ar fi o 1-cofrontieră ar rezulta că există formele diferențiale $\omega_1 \in \Gamma(U'_1, \Omega_E^1)$ și $\omega_2 \in \Gamma(U'_2, \Omega_E^1)$ date de formulele

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left(\sum_i a_i z^i \right) \cdot dz, & a_i &\in k, \\ \omega_2 &= \left(\sum_j b_j z'^j \right) \cdot dz', & b_j &\in k, \quad z' = 1/z, \end{aligned}$$

astfel încît $dz/z = \omega_1 - \omega_2$ pe $U'_1 \cap U'_2$. Acest lucru conduce la egalitatea absurdă

$$\left(\sum_i a_i z^i + \sum_j b_j / z^{2+j} \right) \cdot dz = dz/z.$$

Teorema (6.2) este complet demonstrată.

(6.4) *Observații.* a) Importanța corolarului (6.3) în clasificarea suprafețelor (care ne va interesa în paragrafele următoare) rezidă în faptul că această clasificare fiind „birațională”, vom putea totdeauna presupune că suprafața X de clasificat este model minimal (deoarece după (6.3) orice suprafață domină un model minimal). Mai mult, vom vedea că, exceptînd suprafețele riglate, orice clasă de izomorfism birațional de suprafețe proiective și nesingulare posedă *un singur* model minimal. De asemenea vom clasifica modelele minimale ale suprafețelor riglate. Clasificarea suprafețelor se face cu ajutorul unor invarianți numerici biraționali (cum sînt plurigenurile p_n și în particular genul geometric p_g , cf. (5.7)). Un alt invariant numeric birațional important din acest punct de vedere este iregularitatea. Într-adevăr, folosind teorema de structură a izomorfismelor biraționale de suprafețe ne reducem imediat la a vedea că $\dim H^1(O_X)$ se conservă la o transformare pătratică $\sigma' : X' \rightarrow X$. Or, deoarece X este nesingulară (deci $E = P^1$) și folosind (3.8), rezultă $R^i \sigma'_*(O_{X'}) = 0$ pentru orice $i > 0$, sau echivalent $\chi(O_{X'}) = \chi(O_X)$ (și cum p_g este invariant birațional, rezultă q invariant birațional).

b) Corolarul (6.3) se mai putea demonstra cu ajutorul izomorfismului $\text{Pic}(X') \cong \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z}O_{X'}(E)$ (exercițiu!), de unde se deduce imediat izomorfismul $\text{Num}(X') = (\text{Num}(X) \oplus \mathbb{Z}O_{X'}(E))$, și folosind apoi faptul că rangul lui $\text{Num}(X)$ este finit (teorema Néron-Severi).

(6.5) *Referințe bibliografice.* Demonstrația teoremei (6.2) este prezentată după Safarevici [2].

§ 7.

MORFISME DE LA O SUPRAFAȚĂ
LA O CURBĂ. FIBRĂRI ELIPTICE ȘI CVASIELIPTICE

(7.1) TEOREMĂ. Fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism dominant de la varietatea algebrică neregulară și ireductibilă X la varietatea algebrică Y , astfel încât extinderea de corpuri de funcții raționale $f^*: k(Y) \hookrightarrow k(X)$ să fie separabilă și $k(Y)$ algebric închis în $k(X)$. Atunci există un deschis nevid V în Y astfel încât pentru orice $y \in V$ fibra $f^{-1}(y)$ să fie geometric integră.

Demonstrație. Fie ξ punctul generic al lui X și η punctul generic al lui Y . Este clar că fibra generică $f^{-1}(\eta)$ conține pe ξ (f este dominant), este ireductibilă (închiderea lui $f^{-1}(\eta)$ este X) și redusă (pentru orice $x \in f^{-1}(\eta)$, inelul local $O_{f^{-1}(\eta), x}$ coincide cu $O_{X, x}$). Altfel spus, schema $f^{-1}(\eta)$ este integră peste $k(Y)$. Ipotezele teoremei implică faptul că această schemă este chiar geometric integră, adică pentru orice extindere K a lui $k(Y)$, schema $f^{-1}(\eta) \otimes_{k(Y)} K$ rămâne integră. Într-adevăr, după EGA IV, 4.5.9 și 4.6.1, este suficient să știm că extinderea $k(X)/k(Y)$ este separabilă și că $k(Y)$ este algebric închis în $k(X)$, fapte valabile prin ipoteză.

Demonstrația propriu-zisă a teoremei (7.1) constă în a arăta că, știind că fibra generică este geometric integră, atunci există un deschis nevid V din Y astfel încât fibra $f^{-1}(y)$ să fie geometric integră pentru orice $y \in V$. Mai întâi este clar că problema este locală pe Y , și deci putem presupune $Y = \text{Spec}(A)$ o varietate afină și neregulară, cu A k -algebră de tip finit și integră. Fie acum U un deschis afin nevid din X și $g: U \rightarrow Y$ restricția lui f la U . Vom arăta că dacă teorema este valabilă pentru g , atunci este valabilă și pentru f .

Într-adevăr, fie V un deschis afin nevid din Y astfel încât pentru orice $y \in V$ fibra $g^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap U$ să fie geometric integră. Fie F_1, \dots, F_m componentele ireductibile ale lui $F = X - U$. Deoarece fiecare F_i nu conține pe ξ , rezultă că F intersectează fibra generică $f^{-1}(\eta)$ după o submulțime închisă a lui $f^{-1}(\eta)$ diferită de

$f^{-1}(\eta)$. Teorema dimensiunii fibrelor (EGA IV, 13.1.1) implică atunci că există o submulțime deschisă nevidă V' a lui Y astfel încît pentru orice $y \in V'$ și orice $x \in f^{-1}(y)$, $\dim_x f^{-1}(y) = \dim(f^{-1}(y) - F) = d$, unde $d = \dim(X) - \dim(Y) = \dim f^{-1}(\eta)$. Deoarece U este dens în X , rezultă atunci că $f^{-1}(y)$ este geometric ireductibilă dacă și numai dacă $g^{-1}(y)$ este geometric ireductibilă. În plus, rezultă că orice fibră geometrică a lui f deasupra unui punct $y \in V \cap V'$ este ireductibilă și generic redusă. Ca să deducem că această fibră geometrică este (gobal) redusă este suficient să observăm că ea nu are componente scufundate (cf. Altman-Kleiman [1], chap. VII, (2.2)). Or, acest fapt este adevărat deoarece $f^{-1}(y)$ este o schemă avînd toate inelele locale intersecții complete (deoarece X și Y sînt nesingulare).

Ne-am redus deci la cazul cînd $X = \text{Spec}(B)$ și $Y = \text{Spec}(A)$ sînt afine, cu $A \subset B$ via f^* , și extinderea corpurilor de fracții respective $k(X)/k(Y)$ satisface ipotezele teoremei. Există atunci o bază de transcendență separantă t_1, \dots, t_a a lui $k(X)/k(Y)$ și un element primitiv $t_{a+1} \in k(X)$ pentru extinderea finită și separabilă $k(X)/k(Y)(t_1, \dots, t_a)$, soluție a polinomului ireductibil și separabil

$$\varphi = T^r + a_1 T^{r-1} + \dots + a_0, \quad a_i \in k(Y)(t_1, \dots, t_a).$$

Înmulțind eventual pe t_{a+1} cu un element convenabil din $k(Y)$, putem presupune în plus că $a_i \in A[t_1, \dots, t_a]$. Deoarece X este birațional izomorfă cu hipersuprafața $\varphi = \varphi(T_1, \dots, T_a, T_{a+1}) = 0$ din \mathbf{A}^{a+1} , reducerea de mai sus ne permite să presupunem că ne reducem la cazul cînd $B = A[T_1, \dots, T_{a+1}]/\varphi A[T_1, \dots, T_{a+1}]$, cu $\varphi \in A[T_1, \dots, T_{a+1}]$ polinom în $d+1$ variabile T_1, \dots, T_{a+1} .

Ipoteza că fibra generică a lui f este geometric integră se traduce prin aceea că φ rămîne ireductibil și peste închiderea algebrică $\overline{k(Y)}$ a lui $k(Y)$. Dacă $y \in Y = \text{Spec}(A)$ este un punct, vom nota prin $\varphi_y(T_1, \dots, T_{a+1})$ imaginea lui φ prin omomorfismul canonic $A[T_1, \dots, T_{a+1}] \rightarrow k(y)[T_1, \dots, T_{a+1}]$. Avem atunci de arătat că $\{y \in Y/\varphi_y \text{ este ireductibil peste } \overline{k(y)}\}$ conține o submulțime deschisă a lui Y .

Fie n gradul (total) al lui φ și $\alpha(p)$ ($p \geq 0$) numărul monoamelor în $d+1$ variabile de grad $\leq p$. Pentru orice $p, q \geq 0$ astfel încît $p+q = n$ considerăm morfismul

$$u_{p,q} : \mathbf{A}^{\alpha(p)}(A) \times_A \mathbf{A}^{\alpha(q)}(A) \rightarrow \mathbf{A}^{\alpha(n)}(A).$$

dat de

$$((a_{i_0}, \dots, i_d), (b_{j_0}, \dots, j_d)) \mapsto (c_{h_0}, \dots, h_d), \text{ cu}$$

$$c_{h_0}, \dots, h_d = \sum_{0 \leq i_j \leq h_j} a_{i_0}, \dots, i_d b_{h_0-i_0}, \dots, h_d-i_d,$$

corespunzător înmulțirii polinoamelor de grade p și q , unde prin $\mathbf{A}^n(A)$ am notat spațiul afin $\text{Spec } A[T_1, \dots, T_n]$ peste A .

Este clar că dacă $y \in Y$, φ_y se descompune în factori de grade p și q peste $\bar{k}(y)$ dacă și numai dacă punctul din $\mathbf{A}^{\alpha(n)}(k(y)) = \mathbf{A}^{\alpha(n)}(A) \otimes_k k(y)$ coresponzător lui φ_y este în imaginea morfismului

$$u_{p,q} \otimes_A k(y) : \mathbf{A}^{\alpha(p)}(k(y)) \otimes_{k(y)} \mathbf{A}^{\alpha(q)}(k(y)) \rightarrow \mathbf{A}^{\alpha(n)}(k(y)).$$

Însă φ definește un morfism $\Phi : Y = \text{Spec}(A) \rightarrow \mathbf{A}^{\alpha(n)}(A)$. Fie $Z = \bigcup_{p+q=n} \text{Imaginea}(u_{p,q})$. Atunci după o teoremă a lui Chevalley, Z este o mulțime constructibilă, și deci $\Phi^{-1}(Z)$ este de asemenea constructibilă. Cum punctul generic al lui Y nu aparține lui $\Phi^{-1}(Z)$, există un deschis nevid V al lui Y disjunct de $\Phi^{-1}(Z)$. Cu aceasta demonstrația teoremei (7.1) este completă.

Dacă în enunțul teoremei (7.1), Y este o curbă algebrică, atunci separabilitatea extinderii $k(X)/k(Y)$ este o consecință a faptului că $k(Y)$ este algebric închis în $k(X)$. Acest fapt rezultă din :

(7.2) LEMĂ. Fie K un corp de funcții algebrice de o variabilă peste un corp perfect k (adică K este o extindere finit generată a lui k de grad de transcendență 1), și fie $L \supset K$ o extindere a lui K în care K este algebric închis. Atunci extinderea L/K este separabilă.

Demonstrație. Deoarece k este perfect există un element $f \in K$ astfel încît extinderea $K/k(f)$ să fie finită și separabilă. Avem atunci $K^{1/p} = K(f^{1/p})$, unde $p = \text{car}(k) > 0$ (dacă $p = 0$ nu avem nimic de dovedit). Într-adevăr, deoarece $K \subseteq K^{1/p}$, incluziunea $K(f^{1/p}) \subseteq K^{1/p}$ este clară. Pe de altă parte, fie $g \in K$ un element primitiv al extinderii finite și separabile $K/k(f)$. Atunci $K^{1/p} = k(f^{1/p})(g^{1/p})$ și deoarece g este separabil peste $k(f)$, $g^{1/p}$ este de asemenea separabil peste $k(f^{1/p})$, deci $K^{1/p} = k(f^{1/p})(g) \subseteq K(f^{1/p})$, ceea ce termină de probat egalitatea $K^{1/p} = K(f^{1/p})$.

Acum a arăta că extinderea L/K este separabilă revine la a arăta că L și $K^{1/p}$ sînt linear disjuncte peste K . Or, $f^{1/p} \notin L$ (deoarece K este algebric închis în L), și deoarece $f \in K \subseteq L$, avem :

$$[L(f^{1/p}) : L] = p = [K(f^{1/p}) : K],$$

ceea ce încheie demonstrația lemei (7.2).



(7.3) COROLAR. Fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism dominant de la varietatea ireductibilă și nesingulară X de dimensiune ≥ 2 la curba ireductibilă Y , astfel încât $k(Y)$ să fie algebric închis în $k(X)$. Atunci, exceptând un număr finit de puncte închise din Y , fibra $f^{-1}(y)$ este geometric integră.

Demonstrația rezultă din (7.1) și (7.2).

(7.4) PROPOZIȚIE. Fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism dominant de varietăți ireductibile și nesingulare peste corpul k (algebric închis) de caracteristică zero. Atunci există un deschis nevid $V \subseteq Y$ astfel încât $f|f^{-1}(V): f^{-1}(V) \rightarrow V$ să fie un morfism neted, adică pentru orice $y \in V$ fibra $f^{-1}(y)$ este geometric netedă de dimensiune pură $= \dim(X) - \dim(Y)$.

Demonstrație. Pasul 1. Fie $g: U \rightarrow V$ un morfism dominant de varietăți ireductibile peste k (cu $\text{car}(k) = 0$). Atunci există un deschis nevid $U' \subseteq U$ astfel încât $g' = g|U': U' \rightarrow V$ să fie neted.

Demonstrația pasului 1. Înlocuind eventual pe U și V cu deschiși convenabili, putem presupune că U și V sînt varietăți nesingulare. Deoarece $k(U)$ este separabil generat peste $k(V)$, rezultă că $\Omega_{U/V}$ este local liber de rang $n = \dim(U) - \dim(V)$ în punctul generic al lui U în virtutea unui rezultat binecunoscut de algebră și a proprietății c) din demonstrația teoremei (7.1) privind localizarea. Rezultă că $\Omega_{U/V}$ este local liber de rang n într-un deschis U' nevid din U . Cum U și V sînt nesingulare, rezultă atunci că $g' = g|U'$ este neted.

Pasul 2. Fie $f: X \rightarrow Y$ un morfism de scheme algebrice peste k de caracteristică zero. Dacă pentru fiecare $r \geq 0$ notăm prin X_r mulțimea punctelor închise $x \in X$ astfel încât $\text{rang}(T_{f,x}) \leq r$, unde $T_{f,x}: T_{X,x} \rightarrow T_{Y,f(x)}$ este aplicația tangentă, atunci $\dim f(\overline{X_r}) \leq r$.

Demonstrația pasului 2. Fie V o componentă ireductibilă a lui $f(X_r)$ și U o componentă ireductibilă a lui X_r astfel încât $f(U) \subseteq V$ și $\overline{f(U)} = V$. Dacă U și V sînt înzestrate cu structurile reduse respective, fie $g = f|U: U \rightarrow V$. După pasul 1 există un deschis U' în U astfel încât $g' = g|U': U' \rightarrow V$ să fie un morfism neted. Din construcție există un punct $x \in U' \cap X_r$. În diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} T_{U',x} & \xrightarrow{\quad} & T_{X,x} \\ T_{g',x} \downarrow & & \downarrow T_{f,x} \\ T_{V,f(x)} & \xrightarrow{\quad} & T_{Y,f(x)} \end{array}$$

aplicațiile orizontale sînt injective (U' și V sînt subscheme local închise în X și Y respectiv). Însă deoarece $\text{rang}(T_{f,x}) \leq r$ ($x \in X_r$)

și $T'_{g',x}$ este surjectivă (g' este neted), rezultă că $\dim(T_{V,f(x)}) \leq r$, și deci $\dim(V) \leq r$.

Pasul 3. Concluzia propoziției. Fie $r = \dim(Y)$ și X_{r-1} submulțimea din pasul 2. După pasul 2 $\dim(\overline{f(X_{r-1})}) \leq r-1$, deci scoțind $\overline{f(X_{r-1})}$ din Y , putem presupune că $\text{rang}(T_{f,x}) \geq r$ pentru fiecare punct închis al lui X . Deoarece Y este nesingulară și de dimensiune r , rezultă că $T_{f,x}$ este surjectivă pentru orice $x \in X$ închis. Altfel spus, f este neted. Q.E.D.

(7.5) DEFINIȚIE. Fie $f: X \rightarrow B$ un morfism surjectiv de la suprafața X la curba nesingulară (și proiectivă) B . Vom mai spune că f este o fibrare de bază curba B . Fibrarea f se numește *minimală* dacă pentru fiecare $b \in B$, fibra $F_b = f^{-1}(b) = X \times_B \text{Spec}(k(b))$ nu conține nici-o curbă excepțională de prima specie drept componentă.

Observăm că dacă $f: X \rightarrow B$ este o fibrare, atunci f este totdeauna morfism plat (deoarece B este curbă nesingulară) și deci (ținând cont de teoremele de schimbare a bazei, vezi Mumford [2], §5, sau EGA III (2)), funcția $b \rightarrow p_a(F_b)$ este constantă. Această proprietate justifică de fapt denumirea de fibrare.

Fie $f: X \rightarrow B$ o fibrare cu proprietatea $f_*O_X = O_B$. După teorema de conexiune a lui Zariski (EGA III 4.3.2) toate fibrele lui f sînt conexe. Cum condiția $f_*O_X = O_B$ este echivalentă (în cazul cînd B este curbă nesingulară) cu condiția ca $k(B)$ să fie algebric închis în $k(X)$, din (7.3) rezultă că exceptînd un număr finit de puncte închise din B , toate fibrele corespunzătoare celorlalte puncte din B sînt curbe integrale.

(7.6) DEFINIȚIE. Fibrarea f se numește *eliptică* dacă f este minimală, $f_*O_X = O_B$ și dacă aproape toate fibrele lui f (exceptînd un număr finit de fibre închise) sînt curbe nesingulare eliptice. Fibrarea f se numește *cvasieliptică* dacă f este minimală, $f_*O_X = O_B$ și aproape toate fibrele lui f sînt curbe integrale cu singularități și de gen aritmetic unu.

Deci o fibrare $f: X \rightarrow Y$ cu proprietățile f minimală și $f_*O_X = O_B$ este eliptică sau cvasieliptică dacă $p_a(F_b) = 1$ pentru un $b \in B$. Dacă toate fibrele lui f sînt curbe cu singularități, atunci f este cvasieliptică. Dacă există o fibră F_b nesingulară, atunci morfismul f este generic neted și deci fibrarea f este eliptică. Propoziția (7.4) arată că în caracteristică zero nu pot apărea fibrări cvasieliptice. În finalul acestui paragraf vom demonstra că fibrările cvasieliptice pot apărea numai în caracteristică 2 sau 3, iar aproape toate fibrele unei fibrări cvasieliptice sînt curbe raționale cu cîte un singur punct cuspidal ordinar drept singularitate. Fibrările eliptice și cvasieliptice joacă un rol central în clasificarea suprafețelor.

Fie $f: X \rightarrow B$ o fibrare eliptică sau evasieliptică și $D = F_b = \sum_{i=1}^p n_i E_i$, cu $b \in B$ punct închis, $p \geq 1$, $n_i \geq 1$ și E_1, \dots, E_p componentele integrale ale lui D astfel încît $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$. Dacă K este un divizor canonic pe X , atunci $(D \cdot E_i) = (K \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, p$. Într-adevăr, dacă F este o fibră a lui f diferită de D , atunci $F \cong D$ și deci $(D \cdot E_i) = (F \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , deoarece $\text{Supp}(F) \cap E_i = \emptyset$. Pe de altă parte, formula genului arată că $2p_a(D) - 2 = (D^2) + (D \cdot K)$, de unde, ținînd cont că $p_a(D) = 1$ și $(D^2) = 0$, rezultă $(D \cdot K) = 0$, deci $\sum_{i=1}^p n_i (K \cdot E_i) = 0$.

Dacă $p = 1$ și $n_1 \geq 1$, atunci $(K \cdot E_1) = 0$. Dacă $p \geq 2$, atunci din (2.6) rezultă $(E_i^2) < 0$ pentru orice $i = 1, \dots, p$. Însă avem $(K \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i , deoarece dacă pentru un i $(K \cdot E_i) < 0$, cum avem și $(E_i^2) < 0$, rezultă imediat că E_i este curbă excepțională de prima specie, ceea ce contrazice minimalitatea lui f . În fine relațiile $\sum_{i=1}^p n_i \cdot (K \cdot E_i) = 0$ și $(K \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i implică și $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , și afirmația de mai sus este dovedită. Această observație conduce la :

(7.7) DEFINIȚIE. Fie X o suprafață minimală și $D = \sum_{i=1}^p n_i E_i > 0$ un divizor efectiv. Vom spune că D este *divizor* (sau curbă) *de tip canonic* dacă $(K \cdot E_i) = (D \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, p$. Dacă în plus D este conex și cel mai mare divizor comun al numerelor n_1, \dots, n_p este egal cu 1, atunci vom spune că D este *divizor* (sau curbă) *indecompozabil* (ă) *de tip canonic*.

Din cele de mai sus rezultă că dacă o suprafață minimală X posedă o structură de fibrare eliptică sau evasieliptică $f: X \rightarrow B$, atunci există pe X cel puțin o curbă indecompozabilă de tip canonic.

(7.8) TEOREMĂ. Fie $D = \sum_{i=1}^p n_i E_i > 0$ o curbă indecompozabilă de tip canonic pe suprafața minimală X și L un \mathcal{O}_D -modul inversibil. Dacă pentru orice $i = 1, \dots, p$ $\deg(L \otimes \mathcal{O}_{E_i}) = 0$, atunci $H^0(D, L) \neq 0$ dacă și numai dacă $L \cong \mathcal{O}_D$. În plus $H^0(D, \mathcal{O}_D) = k$.

Demonstrație. Va fi suficient să arătăm că orice secțiune nenulă $s \in H^0(D, \mathcal{O}_D)$ generează pe L , adică definește un izomorfism al lui \mathcal{O}_D pe L . De aici va rezulta și faptul că $H^0(D, \mathcal{O}_D)$ este corp, de unde $H^0(D, \mathcal{O}_D) = k$ deoarece extinderea $H^0(D, \mathcal{O}_D)/k$ este finită și k algebric închis.



Fie $s_i = s|_{E_i} \in H^0(E_i, L \otimes O_{E_i})$. Cum $\deg(L \otimes O_{E_i}) = 0$, atunci s_i este sau identic nulă, sau s_i nu se anulează nicăieri (în care caz s_i generează pe $L \otimes O_{E_i}$). Dacă s_i este identic nulă pe o componentă E_i , atunci s_j este de asemenea identic nulă pentru orice j deoarece D este curbă conexă. Prin urmare, dacă s_i nu se anulează nicăieri pe E_i , atunci s nu se anulează nicăieri pe D , deci s generează pe L și totul este dovedit în acest caz.

Presupunem deci că s este identic nulă pe E_i pentru orice i . Fie k_i ordinul de anulare al lui s pe E_i . Aceasta înseamnă că

$$s \in \text{Ker}(H^0(D, L) \rightarrow H^0(k_i E_i, L_{k_i E_i})).$$

și dacă $k_i < n_i$, atunci

$$s \notin \text{Ker}(H^0(D, L) \rightarrow H^0((k_i + 1)E_i, L_{(k_i+1)E_i})),$$

unde dacă $Z \subset D$ este o subschemă închisă a lui D , am notat prin $L_Z = L \otimes O_Z$. În orice caz avem pentru orice i inegalitățile $1 \leq k_i \leq n_i$.

Presupunem mai întâi că $k_i < n_i$. Atunci din diagrama comutativă cu linia orizontală exactă :

(7.8.1)

$$\begin{array}{c} H^0(L) \\ \downarrow \quad \searrow \\ 0 \rightarrow H^0(E_i, L \otimes (O_X(-k_i E_i)/O_X(-(k_i+1)E_i))) \rightarrow H^0(L_{(k_i+1)E_i}) \rightarrow H^0(L_{k_i E_i}) \end{array}$$

rezultă că s definește o secțiune nenulă în $H^0(E_i, L \otimes (O_X(-k_i E_i)/O_X(-(k_i+1)E_i)))$. Această secțiune se anulează în fiecare punct $P \in E_i$ cu ordinul \geq multiplicitatea de intersecție $(E_i \cdot \sum_{j \neq i} k_j E_j; P)$.

Într-adevăr, problema fiind locală în P presupunem pentru simplitate că E_i este tăiată în P de o singură componentă E_j cu $j \neq i$ (cazul general se tratează absolut la fel). Fie $A = O_{X,P}$, $t_i = 0$ (resp. $t_j = 0$) o ecuație locală a lui E_i (resp. a lui E_j) în P . Avem diagrama comutativă analogă lui (7.8.1) :

$$\begin{array}{c} s \in A/(t_i^{n_i} \cdot t_j^{n_j}) \\ \downarrow \quad \searrow \\ 0 \rightarrow A/(t_i) \xrightarrow{t_i^{k_i}} A/(t_i^{k_i+1}) \rightarrow A/(t_i^{k_i}) \rightarrow 0 \end{array}$$

Din relațiile $s = t_i^{k_i} \cdot \lambda = t_j^{k_j} \cdot \mu$, cu $\lambda, \mu \in A$, deducem ținând cont că t_i, t_j este un A -sir: $\mu = t_i^{k_i} \cdot \mu' (\mu' \in A)$, deci $\lambda = t_j^{k_j} \cdot \mu'$. Secțiunea s este reprezentată de $\bar{\lambda} = \lambda \bmod (t_i) = t_j^{k_j} \cdot \mu' \bmod (t_i)$. Atunci $\text{ord}_P(\bar{\lambda}) = \dim(A/(t_i, \lambda)) = \dim(A/(t_i, t_j^{k_j} \cdot \mu')) \geq \dim(A/(t_i, t_j^{k_j})) =$ = multiplicitatea de intersecție $(E_i, k_j E_j; P)$ și inegalitatea de mai sus este dovedită.

Rezultă atunci că dacă $k_i < n_i$, avem:

$$(E_i \cdot \sum_{j \neq i} k_j E_j) \leq \deg_{E_i}(L \otimes (O_X(-k_i E_i)/O_X(-(k_i + 1)E_i))) =$$

(7.8.2)

$$= k_i \cdot \deg(O_X(-E_i)/O_X(-2E_i)) = -k_i \cdot (E_i^2),$$

fiindcă $\deg(L_{E_i}) = 0$.

Pe de altă parte, dacă $k_i = n_i$, atunci deoarece $(E_i \cdot D) = 0$, avem:

$$(7.8.3) \quad (E_i \cdot \sum_j k_j E_j) = - (E_i \cdot \sum_{j \neq i} (n_j - k_j) E_j) \leq 0,$$

deoarece $n_i - k_i = 0$ și pentru $i \neq j$, $(E_i \cdot E_j) \geq 0$.

Prin urmare dacă notăm prin $D_1 = \sum_j k_j E_j$, atunci din (7.8.2) și (7.8.3) deducem $(D_1 \cdot E_i) \leq 0$ pentru orice i . Însă $\sum_i n_i (D_1 \cdot E_i) = (D \cdot D_1) = \sum_i k_i (D \cdot E_i) = 0$, și deci $(D_1 \cdot E_i) = 0$ pentru orice i . Aceasta arată că $D - D_1$ și D_1 sînt curbe de tip canonic.

Afirmăm că fracțiile k_i/n_i nu depind de indicele i . Într-adevăr, notînd prin $a/b = \max(k_i/n_i)$, fie $Z = aD - bD_1$. Atunci $Z = \sum_j (an_j - bk_j)E_j$, deci Z este un divizor efectiv în care nu apar componentele E_i pentru care $a/b = k_i/n_i$. Cum cel puțin o astfel de componentă există, rezultă că Z nu conține nici-o componentă E_j care intersectează pe E_i , deoarece $(Z \cdot E_i) = a(D \cdot E_i) - b(D_1 \cdot E_i) = 0$. Cum D este conex, rezultă prin inducție că $Z = 0$ și afirmația este dovedită.

Deoarece cel mai mare divizor comun al lui n_1, \dots, n_p este 1, există $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{Z}$ astfel încît $\sum_i a_i n_i = 1$, de unde deducem:

$$a/b = a_1 k_1 / a_1 n_1 = \dots = a_p k_p / a_p n_p = \sum_i a_i k_i / \sum_i a_i n_i = \sum_i a_i k_i \in \mathbb{Z},$$

și deci $a/b \geq 1$. Cum avem și $a/b \leq 1$, rezultă $a = b$, adică $D_1 = D$. Altfel spus, $s(x) \neq 0 \forall x \in D$ și teorema (7.8) este demonstrată.

(7.9) COROLAR. Dacă D este o curbă indecompozabilă de tip canonic, atunci $\omega_D \cong O_D$, unde ω_D este fasciculul dualizant al lui D .

Demonstrație. După dualitatea Serre, $\dim H^1(\omega_D) = \dim H^0(O_D) = 1$. Din șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(K) \rightarrow O_X(K + D) \rightarrow \omega_D \rightarrow 0$$

și din teorema lui Riemann-Roch deducem $\chi(\omega_D) = \chi(O_X(K + D)) - \chi(O_X(K)) = 1/2(K + D \cdot D) = 0$. Deci $\dim H^0(\omega_D) = 1$. Teorema (7.8) implică atunci că $\omega_D \cong O_D$, deoarece $\deg(\omega_D/E_i) = (K + D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i . Q.E.D.

(7.10) COROLAR. Dacă $D = \sum_{i=1}^p n_i E_i$ este o curbă indecompozabilă de tip canonic și dacă D' este un divizor efectiv pe X astfel încât $(D' \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, p$, atunci $D' = nD + D''$, unde $n \geq 0$ și D'' este un divizor efectiv cu $\text{Supp}(D'') \cap \text{Supp}(D) = \emptyset$.

Demonstrație. Fie n numărul natural cu proprietățile $D' - nD \geq 0$ și $D' - (n+1)D \not\geq 0$. Punind $D'' = D' - nD$, avem șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(D'' - D) \rightarrow O_X(D'') \rightarrow O_D(D'') = L \rightarrow 0.$$

Fie $s \in H^0(X, O_X(D''))$ cu $\text{div}_X(s) = D''$. Atunci deoarece $D'' - D = D' - (n+1)D \not\geq 0$, imaginea \tilde{s} a lui s în $H^0(D, L)$ este nenulă. Pe de altă parte, deoarece $\deg(L/E_i) = (D'' \cdot E_i) = (D' \cdot E_i) - n(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , teorema (7.8) implică $L \cong O_D$. Prin urmare $s(x) \neq 0$ pentru orice $x \in D$, adică $\text{Supp}(D'') \cap \text{Supp}(D) = \emptyset$. Q.E.D.

(7.11) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală cu $(K^2) = 0$ și $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă C de pe X . Dacă D este o curbă indecompozabilă de tip canonic pe X , atunci există o structură $f: X \rightarrow B$ de fibrare eliptică sau cvasieliptică pe X (evident, și reciproc). Mai exact, există un număr natural n astfel încât factorizarea Stein a morfismului $\varphi_{|nD|}: X \rightarrow |nD|$ să fie un fascicul de curbe de tip canonic (adică o fibrare eliptică sau cvasieliptică).

Demonstrație. Cazul $p_g = 0$. Din (7.9) avem pentru orice $n \geq 0$ șirul exact:

$$(7.11.1) \quad 0 \rightarrow O_X(nK + (n-1)D) \rightarrow O_X(nK + nD) \rightarrow O_D \rightarrow 0$$

în care avem $H^2(O_X(nK + (n-1)D)) = 0$ pentru orice $n \geq 2$. Într-adevăr, folosind dualitatea Serre totul revine la a arăta că $H^0(O_X(-p(K+D))) = 0$ pentru orice $p \geq 1$, sau încă $|-p(K+D)| = \emptyset$ pentru $p \geq 1$. Dacă prin absurd ar exista un $\Delta \geq 0$, $\Delta \sim -p(K+D)$, deosebim următoarele situații:

a) $\Delta = 0$, deci $p(K+D) \sim 0$, sau $pK \sim -pD$. Fie atunci C o curbă ireductibilă astfel încît $(D \cdot C) > 0$. Atunci $(K \cdot C) = 1/p (pK \cdot C) = -1/p (pD \cdot C) = -(D \cdot C) < 0$, fapt ce contrazice ipotezele teoremei.

b) $\Delta > 0$. Fie C o curbă ireductibilă astfel încît $(\Delta \cdot C) > 0$. Avem $(\Delta \cdot C) = -p(K \cdot C) - p(D \cdot C) \leq 0$, deoarece prin ipoteză $(K \cdot C) \geq 0$ și $(D \cdot C) \geq 0$ (deoarece D este curbă de tip canonic). Aceasta reprezintă o contradicție și în acest caz.

Din $H^2(O_X(nK + (n-1)D)) = 0$ și șirul exact (7.11.1) deducem șirul exact de coomologie

$$0 \rightarrow H^2(O_X(nK + nD)) \rightarrow H^2(O_D) = 0,$$

și deci, pentru orice $n \geq 2$, avem $H^2(O_X(nK + nD)) = 0$. Cum $H^1(O_D) = H^0(\omega_D) = H^0(O_D) \neq 0$ (cf. (7.9)) obținem $H^1(O_X(nK + nD)) \neq 0$. Teorema Riemann-Roch ne dă:

$$\chi(O_X(nK + nD)) = \chi(O_X) = 1 - g.$$

Ținînd cont de (5.1) formula lui Noether devine: $10 - 8g = b_2$, de unde $g \leq 1$. Prin urmare am obținut

$$\chi(O_X(nK + nD)) = 0 \text{ sau } 1 \text{ pentru } n \geq 2.$$

Cum am văzut că $H^1(O_X(nK + nD)) = 0$ și $H^2(O_X(nK + nD)) = 0$, rezultă $H^0(O_X(nK + nD)) \neq 0$ pentru $n \geq 2$, altfel spus, dacă $n \geq 2$, există un $D_n \in |nK + nD|$. Din a) deducem că nu putem avea $D_n = 0$. Afirmăm că D_n este de tip canonic.

Într-adevăr, fie $D_n = \sum_i n_i E_i$; atunci $(D_n \cdot E_i) = n(K \cdot E_i) + n(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , deci după (7.10) putem scrie $D_n = aD + \sum_j k_j F_j$, $a \geq 0$, $k_j > 0$, iar F_j sînt curbe (distincte două cîte două) ce nu taie pe D . Însă cum $(K \cdot F_j) \geq 0$ pentru orice j , iar $\sum_j k_j (K \cdot F_j) = (K \cdot \sum_j k_j F_j + aD) = (K \cdot nK + nD) = 0$, rezultă $(K \cdot F_j) = 0$ pentru orice j . În fine, $(D_n \cdot F_j) = n(K \cdot F_j) + n(D \cdot F_j) = 0$ pentru orice j deoarece $\text{Supp}(D) \cap F_j = \emptyset$ și afirmația este dovedită.

Observăm acum că nu putem avea pentru orice $n \geq 2$ $D_n = a_n D$ cu a_n întreg ≥ 0 , deoarece în caz contrar am avea $nK \sim \lambda_n D$ cu λ_n întreg și $n \geq 2$. Luînd $n = 2$ și $n = 3$, obținem $K = 3K - 2K \sim (\lambda_3 - \lambda_2) D = \lambda D$. Dacă $\lambda < 0$, atunci există o curbă ireductibilă C astfel încît $(D \cdot C) > 0$, deci $(K \cdot C) < 0$, absurd. Dacă $\lambda \geq 0$, atunci $|K| = |\lambda D| \neq \emptyset$ și deci $p_g > 0$, din nou absurditate.

În acest fel am demonstrat că pe X există cel puțin o curbă D' indecompozabilă de tip canonic ce nu taie pe D . Aplicînd din nou (7.9) putem scrie șirul exact:

$$0 \rightarrow O_X(2K + D + D') \rightarrow O_X(2K + 2D + 2D') \rightarrow O_D \oplus O_{D'} \rightarrow 0.$$

Raționînd exact ca mai înainte deducem că $H^2(O_X(2K + D + D')) = 0$ și deci $H^2(O_X(2K + 2D + 2D')) = 0$, și deoarece $H^1(O_D \oplus O_{D'})$ are dimensiunea 2, avem $\dim H^1(O_X(2K + 2D + 2D')) \geq 2$, iar cu teorema Riemann-Roch găsim $\chi(O_X(2K + 2D + 2D')) = \chi(O_X) = 0$ sau 1, de unde deducem:

$$\dim H^0(O_X(2K + 2D + 2D')) \geq 2.$$

Fie atunci $\Delta \in |2K + 2D + 2D'|$. Avem $\Delta > 0$, $(\Delta^2) = 0$ și $\dim |\Delta| \geq 1$. În plus, deoarece D și D' sînt de tip canonic, Δ rezultă tot de tip canonic. În aceste condiții rezultă că sistemul linear complet $|\Delta|$ este compus cu un fascicul de curbe.

Într-adevăr, dacă C este partea fixă a lui $|\Delta|$, atunci din (2.6) și din faptul că Δ este de tip canonic deducem $((\Delta - C)^2) \leq 0$. Altfel spus, aplicația rațională $\varphi_{|\Delta|}: X \rightarrow \varphi_{|\Delta|}(X) = B \subseteq |\Delta|$ este peste tot definită, deoarece în caz contrar am avea $((\Delta - C)^2) > 0$. Deoarece $\dim |\Delta| \geq 1$, B nu poate fi un punct. De asemenea, B nu poate fi nici suprafață, deoarece în caz contrar $\Delta - C = \varphi^*(H)$ cu H secțiune hiperplană pe B , de unde $((\Delta - C)^2) = [k(X) : k(B)](H^2) > 0$. Deci $|\Delta|$ este într-adevăr compus cu un fascicul și $\varphi_{|\Delta|}$ este un morfism.

Din $(D \cdot \Delta) = (D \cdot 2K + 2D + 2D') = 0$, $(D \cdot \Delta - C) \geq 0$ și $(D \cdot C) \geq 0$ rezultă că $(D \cdot \Delta - C) = 0$. Cum D este conexă deducem că D este conținută în una din fibrele lui $\varphi_{|\Delta|}$. Aplicînd (2.6) și ținînd cont că $(D^2) = 0$ deducem că un multiplu rațional de D coincide cu una din fibrele morfismului $f: X \rightarrow B'$, unde f este morfismul dedus din $\varphi_{|D|}$ via factorizarea Stein (deci B' este normalizata curbei B în corpul $k(X)$). Deoarece cel mai mare divizor comun al coeficienților componentelor lui D este 1, atunci una din fibrele lui f este chiar un multiplu întreg (și pozitiv) de D . În par-

ticular, genul aritmetic al respectivei fibre (a lui f) este 1, și deci f este fibrare eliptică sau ovasieliptică. Teorema (7.11) este demonstrată în cazul când $p_g = 0$.

Cazul $p_g > 0$. La fel ca la cazul precedent, este suficient să arătăm că dimensiunea k -spațiului vectorial $H^0(O_X(\Delta))$ este ≥ 2 pentru un divisor Δ de tip canonic. Mai exact, vom arăta că există un $n > 0$ astfel încît $\dim H^0(O_X(nD)) \geq 2$.

Fie $F_n = O_X(nD)/O_X$. Șirul exact $H^0(O_X(nD)) \rightarrow H^0(F_n) \rightarrow H^1(O_X)$ arată că este suficient să probăm că $\dim H^0(F_n) \rightarrow \infty$ cînd $n \rightarrow \infty$. Notînd $L = F_1$, atunci L este inversibil pe D , iar din șirul exact

$$(7.11.2) \quad 0 \rightarrow F_{n-1} \rightarrow F_n \rightarrow L^n \rightarrow 0$$

deducem că funcția $n \mapsto \dim H^0(F_n)$ este crescătoare. Din teorema Riemann-Roch rezultă $\chi(O_X(nD)) = \chi(O_X)$, de unde, folosind aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré, $\chi(F_n) = 0$ pentru orice $n > 0$.

În șirul exact $H^1(F_n) \rightarrow H^2(O_X) \rightarrow H^2(O_X(nD))$ avem $H^2(O_X(nD)) = 0$ pentru $n \geq 0$, deoarece folosind dualitatea Serre totul revine la a arăta că $|K - nD| = \emptyset$ pentru n suficient de mare. Or acest fapt rezultă din următoarea observație generală:

(7.11.3) *Observație.* Dacă Δ este un divisor arbitrar pe suprafața X și $D > 0$ este un divisor strict pozitiv, atunci $|\Delta - nD| = \emptyset$ pentru n suficient de mare.

Într-adevăr, pentru orice $n \geq 1$ avem $|\Delta - (n+1)D| \subseteq |\Delta - nD|$ (via aplicația $D' \mapsto D' + D$, $D' \in |\Delta - (n+1)D|$), deci există un $n_0 > 0$ astfel încît $|\Delta - n_0 D| = |\Delta - (n_0 + s)D|$ pentru orice $s \geq 1$. Dacă enunțul observației ar fi fals, ar rezulta că $|\Delta - n_0 D| \neq \emptyset$. Atunci orice divisor $F \in |\Delta - n_0 D|$ s-ar putea scrie sub forma $F = sD + F'$, cu $F' \in |\Delta - (n_0 + s)D|$ pentru orice $s \geq 1$, ceea ce este evident absurd. Observația (7.11.3) este deci dovedită.

Revenind la demonstrația teoremei (7.11) (cazul $p_g > 0$), deducem, ținînd cont că $p_g = \dim H^2(O_X) > 0$, $H^1(F_n) \neq 0$ pentru n suficient de mare, și prin urmare $\dim H^0(F_n) = \dim H^1(F_n) \neq 0$ pentru $n \geq 0$.

Presupunem prin absurd că șirul $\{\dim H^0(F_n)\}_n$ este mărginit superior, și fie n cel mai mare număr natural pentru care $\dim H^0(F_{n-1}) < \dim H^0(F_n)$. Din șirul exact (7.11.2) deducem că L^n are o secțiune globală nenulă ce provine dintr-o secțiune $s \in H^0(F_n)$. Cum D este curbă indecompozabilă de tip canonic, iar L^n are gradul zero pe fiecare componentă a lui D , corolarul (7.9) implică că s/D nu se anulează în nici-un punct al lui D ($L^n \cong O_D$), deci s nu se anulează în

nici-un punct al lui D . Cum $\text{Supp}(F_n) = D$, rezultă că s generează pe F_n peste tot ca O_X -modul. Altfel spus, s definește un omomorfism surjectiv de O_X -module $O_X \rightarrow F_n$ al cărui nucleu este exact $O_X(-nD)$. Am găsit deci izomorfismul $O_X/O_X(-nD) \cong F_n = O_X(nD)/O_X$. Luînd puteri tensoriale de ordin $m \geq 1$ ale lui F_n deducem izomorfismele :

$$O_X/O_X(-nD) \cong F_n \cong O_X(mnD)/O_X(n(m-1)D) \cong F_{nm}/F_{n(m-1)}.$$

Aceste izomorfisme ne permit să scriem diagrama comutativă cu liniile și coloanele exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & O_X & \longrightarrow & O_X(n(m-1)D) & \longrightarrow & F_{n(m-1)} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & O_X & \longrightarrow & O_X(nmD) & \longrightarrow & F_{nm} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & F_n & \xlongequal{\quad} & F_n \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

din care deducem diagrama comutativă cu liniile și coloanele exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(F_{n(m-1)}) & & \xrightarrow{\alpha} & H^1(F_{nm}) & \longrightarrow & H^1(F_n) & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \\ H^2(O_X) & & \xlongequal{\quad} & H^2(O_X) & & & \\ \downarrow & & & \downarrow & & & \\ 0 = H^2(O_X(n(m-1)D)) & & & 0 = H^2(O_X(nmD)) & & \text{pentru } m \geq 0. & \end{array}$$

Rezultă că aplicația α este nenulă (deoarece $H^2(O_X) \neq 0$), și deci $\dim H^1(F_{nm}) = \dim \text{Im}(\alpha) + \dim H^1(F_n) > \dim H^1(F_n)$, inegalitate ce contrazice modul de alegere a lui n . Astfel demonstrația teoremei este completă și în cazul $p_g > 0$. Q.E.D.

(7.12) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală cu $(K^2) = 0$ și $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă C de pe X . Atunci sau $2K \sim 0$, sau X conține cel puțin o curbă indecompozabilă de tip canonic.

Demonstrație. Dacă $|2K| \neq \emptyset$, fie $D \in |2K|$; atunci sau $D = 0$, deci $2K \sim 0$, sau $D = \sum_{i=1}^p n_i E_i > 0$, cu E_i componentele integrale (distincte două câte două) ale lui D . În al doilea caz avem $(D \cdot K) = 2(K^2) = 0$, deci $0 = (D \cdot K) = \sum_{i=1}^p n_i (K \cdot E_i)$. Cum însă $(K \cdot E_i) \geq 0$ (prin ipoteză), rezultă $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i . De asemenea, $(D \cdot E_i) = 2(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i altfel spus D este de tip canonic. În particular, X conține o curbă indecompozabilă de tip canonic.

Rămâne deci de analizat cazul $|2K| = \emptyset$. Din teorema Riemann-Roch deducem, ținând cont că $(K^2) = 0$:

$$\dim |2K| + \dim |-K| \geq \chi(O_X) - 2.$$

Însă $p_2 = \dim H^0(\omega_X^2) = 0$ implică $p_1 = p_g = 0$, și deoarece $\dim |2K| = -1$, deducem inegalitatea $\dim |-K| \geq -q$. Dacă $q = 0$, atunci $|-K| \neq \emptyset$ și deci există un $D \in |-K|$. Cum $D = 0$ implică $2K \sim 0$, ceea ce contrazice faptul că $|2K| = \emptyset$, rezultă că $D > 0$. Fie atunci H o secțiune hiperplană pe X astfel încît $(H \cdot D) > 0$. Avem $(K \cdot H) = -(D \cdot H) < 0$, ceea ce contrazice ipotezele teoremei (7.12).

Am demonstrat deci că în cazul $|2K| = \emptyset$, avem $q \geq 1$, $p_g = 0$. Ținând cont de (5.1), formula lui Noether devine $10 - 8q = b_2$, de unde $q = 1$. Fie atunci $f: X \rightarrow B = \text{Alb}(X)$ morfismul Albanese. Avem, după (5.3), $\dim(B) = q = 1$. Deci B este o curbă eliptică și f este un morfism surjectiv (altfel f ar fi constant și deci nu ar putea genera pe B , vezi Serre [4]). Fie F_b fibra $f^{-1}(b)$ cu $b \in B$. Dacă am avea $p_a(F_b) = 0$, formula genului ar implica, ținând cont că $(F_b^2) = 0$:

$$(K \cdot F_b) = -2,$$

ceea ce ar contrazice ipotezele teoremei.

Dacă $p_a(F_b) = 1$, atunci F_b ar fi o curbă de tip canonic și nu am mai avea nimic de demonstrat. Presupunem deci $p_a(F_b) \geq 2$, de unde (formula genului) $(K \cdot F_b) = 2p_a(F_b) - 2 > 2$. Pentru orice punct închis $a \in B - \{b\}$, cu $b \in B$ punct închis fixat al lui B , considerăm șirul exact:

$$0 \rightarrow O_X(2K + F_a - F_b) \rightarrow O_X(2K + F_a) \rightarrow O_{F_b}(2K \cdot F_b) \rightarrow 0.$$

Avem $|F_b - F_a - K| = \emptyset$ deoarece dacă ar exista un $0 \leq D \sim F_b - F_a - K$, atunci $K \sim F_b - F_a - D$, deci $(K \cdot F_b) = (F_b^2) - (F_a \cdot F_b) - (D \cdot F_b) = - (D \cdot F_b) \leq 0$ (deoarece toate fibrele lui f sînt numeric echivalente între ele și $D \geq 0$), inegalitate ce contrazice inegalitatea obținută mai sus. Prin urmare, după dualitatea Serre, $H^2(O_X(2K + F_a - F_b)) = 0$, iar după teorema Riemann-Roch, $\chi(O_X(2K + F_a - F_b)) = \chi(O_X) = 1 - g + p_g = 0$. Rezultă că pentru orice $a \in B - \{b\}$ avem una din posibilitățile:

a) $|2K + F_a - F_b| \neq \emptyset$, sau

b) $H^i(O_X(2K + F_a - F_b)) = 0$ pentru orice $i = 0, 1, 2$, adică omomorfismul de restricție $H^0(O_X(2K + F_a)) \rightarrow H^0(O_{F_b}(2K \cdot F_b))$ este un izomorfism.

Presupunem acum că $|2K + F_a - F_b| = \emptyset$ pentru orice $a \in B$. Atunci fixînd o secțiune nenulă $s \in H^0(O_{F_b}(2K \cdot F_b))$ (o asemenea secțiune există întotdeauna deoarece F_b este o curbă de gen aritmetic ≥ 2 și $\deg(2K \cdot F_b) = 2(K \cdot F_b) = 4p_a(F_b) - 4$), notăm cu $\Delta = \text{div}_{F_b}(s)$. Pentru orice $a \in B - \{b\}$, secțiunea s se ridică în mod unic la o secțiune $s_a \in H^0(O_X(2K + F_a))$, și fie $D_a = \text{div}_X(s_a)$. Obținem o familie algebrică $\{D_a\}_{a \in B - \{b\}}$ de divizori efectivi, parametrizată după curba $B - \{b\}$, astfel încît $D_a \cdot F_b = \Delta$. În plus, dacă $a, a' \in B - \{b\}$, $a \neq a'$, atunci D_a nu poate fi linear echivalent cu $D_{a'}$, deoarece în caz contrar ar rezulta că $F_a \sim F_{a'}$ (din $2K + F_a \sim 2K + F_{a'}$), de unde, pe curba eliptică B , $a \sim a'$, lucru evident absurd. În particular, dacă $a \neq a'$, atunci $D_a \neq D_{a'}$. În aceste condiții X coincide cu închiderea submulțimii $\bigcup_{a \neq b} D_a$. Atunci divizorul D_b , specializarea lui D_a cînd $a \mapsto b$, trebuie să conțină pe F_b drept componentă, deci $D_b = F_b + D'_b$, cu $D'_b \geq 0$. Însă deoarece $D_b \in |2K + F_b|$, obținem că $D'_b \in |2K|$, ceea ce contrazice ipoteza că $|2K| = \emptyset$.

Am demonstrat prin urmare că există un $a \in B$ astfel încît $|2K + F_a - F_b| \neq \emptyset$. Dacă $D \in |2K + F_a - F_b|$, atunci, la fel ca la începutul demonstrației, rezultă că D este de tip canonic. Q.E.D.

(7.13) COROLAR. Fie X o suprafață minimală cu $(K^2) = 0$ și $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă C de pe X . Atunci sau $2K \sim 0$, sau există o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \rightarrow B$ pe X .

Corolarul (7.13) pune în evidență rolul central pe care fibrările eliptice sau cvasieliptice îl joacă în clasificarea suprafețelor algebrice. În continuare ne propunem să determinăm clasa canonică a

unei fibrări eliptice sau evasieliptice $f: X \rightarrow B$. Din (7.3) știm că aproape toate fibrele lui f (exceptând un număr finit dintre ele) sînt (geometric) integrale. Există prin urmare un număr finit de puncte închise $b_1, \dots, b_r \in B$ astfel încît pentru orice punct închis $b \in B - \{b_1, \dots, b_r\}$, fibra $F_b = f^{-1}(b)$ să fie o curbă indecompozabilă de tip canonic, iar F_{b_i} , ($i = 1, \dots, r$), să fie o curbă de forma $f^{-1}(b_i) = m_i P_i$, cu P_i divizor indecompozabil de tip canonic și $m_i \geq 2$, $i = 1, \dots, r$ ($r \geq 0$). Acest fapt rezultă din conexiunea tuturor fibrelor lui f și observația făcută după definiția (7.6). Fibrele $F_{b_i} = m_i P_i$ cu $m_i \geq 2$ și P_i curbă indecompozabilă de tip canonic, $i = 1, \dots, r$, se numesc fibrele multiple ale fibrării $f: X \rightarrow B$ eliptice sau evasieliptice.

Din teoremele de schimbare a bazei (vezi Mumford [2], § 5) rezultă că $R^1 f_* O_X$ este un O_B -modul coerent astfel încît $(R^1 f_* O_X) \otimes k(b) \cong H^1(F_b, O_{F_b})$ pentru orice $b \in B$. Cum însă pentru orice $b \in B - \{b_1, \dots, b_r\}$ $\dim H^1(F_b, O_{F_b}) = 1$ (cf. (7.8) și (7.9)), acest fascicul este inversibil pe deschisul $B - \{b_1, \dots, b_r\}$. Pe de altă parte, deoarece B este curbă nesară, atunci $R^1 f_* O_X = L \oplus T$, cu L local liber de rang finit și T partea sa de torsiune. Comparînd cu cele spuse mai înainte, rezultă că L este inversibil și suportul lui T este conținut în mulțimea $\{b_1, \dots, b_r\}$ (deci T este un O_B -modul de lungime finită).

Dacă $b \in B$ este un punct închis, atunci, deoarece F_b este un divizor de tip canonic, teorema Riemann-Roch pe X arată că $\chi(O_X) = \chi(O_X(F_b))$. Din șirul exact

$$0 \rightarrow O_X \rightarrow O_X(F_b) \rightarrow O_X(F_b) \otimes O_{F_b} \cong O_{F_b} \rightarrow 0$$

și din aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré deducem că $\chi(O_{F_b}) = 0$, adică $\dim H^1(O_{F_b}) = \dim H^0(O_{F_b})$. Folosind din nou teoremele de schimbare de bază citate mai sus, deducem:

$$b \in \text{Supp}(T) \Leftrightarrow \dim H^1(O_{F_b}) \geq 2 \Leftrightarrow \dim H^0(O_{F_b}) \geq 2.$$

Această ultimă afirmație sugerează următoarea:

(7.14) DEFINIȚIE. Fibrele fibrării f pentru care $\dim H^0(O_{F_b}) \geq 2$ se numesc *fibrele excepționale* ale lui f .

Din cele spuse mai sus rezultă că orice fibră excepțională a lui f este fibră multiplă a lui f .

(7.15) TEOREMĂ. Fie $f: X \rightarrow B$ o fibrare eliptică sau cvasieliptică și fie $R^1 f_* O_X = L \oplus T$ descompunerea de mai sus, cu L inversibil pe B și T O_B -modul de lungime finită. Atunci

$$\omega_X \cong f^* (L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right),$$

unde

a) $m_i P_i = F_{b_i}$, ($i = 1, \dots, r$) sînt toate fibrele multiple ale lui f .

b) $0 \leq a_i < m_i$.

c) $a_i = m_i - 1$ dacă F_{b_i} nu este fibră excepțională.

d) $\deg (L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T)$, unde $l(T)$ este lungimea lui T .

Demonstrație. Dacă F_b este o fibră nemultiplă [avem $\omega_{F_b} \cong O_{F_b}$ (7.9). Cum fibratul conormal al lui F_b în X este trivial, rezultă că dacă F_b nu este fibră multiplă, avem $\omega_X \otimes O_{F_b} \cong O_{F_b}$.

Dacă a_1, \dots, a_m sînt m puncte generale ale lui B , avem prin urmare șirul exact:

$$0 \rightarrow \omega_X \rightarrow \omega_X \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^m F_{a_i} \right) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m O_{F_{a_i}} \rightarrow 0,$$

de unde șirul exact de coomologie:

$$0 \rightarrow H^0(\omega_X) \rightarrow H^0(\omega_X \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^m F_{a_i} \right)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^m H^0(O_{F_{a_i}}) \rightarrow H^1(\omega_X).$$

Din acest șir exact deducem inegalitatea:

$$\begin{aligned} \dim H^0 \left(\omega_X \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^m F_{a_i} \right) \right) &\geq \dim H^0(\omega_X) + \sum_{i=1}^m \dim H^0(O_{F_{a_i}}) - \\ &- \dim H^1(\omega_X) = \dim H^0(\omega_X) + m - \dim H^1(\omega_X). \end{aligned}$$

Prin urmare, dacă $m > \dim H^1(\omega_X) - \dim H^0(\omega_X)$, sistemul linear complet $\left| K + \sum_{i=1}^m F_{a_i} \right|$ este nevid. Fie atunci $D \in \left| K + \sum_{i=1}^m F_{a_i} \right|$. Dacă $y \in B$ este un punct închis arbitrar, observăm $(D \cdot F_y) = 0$ (F_y

este o curbă de tip canonic). În această situație componentele lui D sînt în mod necesar conținute în fibrele lui f , deci și componentele lui K au aceeași proprietate. Fie

$$(7.15.1) \quad K \sim \sum_{j=1}^s b_j F_{y_j} + D, \quad b_i \in \mathbb{Z}, \quad s \geq 0,$$

și unde $D \geq 0$ este conținut într-o reuniune (finită) de fibre, dar neconținînd nici-o fibră a lui f . Fie D_1, \dots, D_t componentele conexe ale divizorului D , deci $\text{Supp}(D_i) \cap \text{Supp}(D_j) = \emptyset$ pentru $i \neq j$. Presupunem că D_i este conținut în fibra F_{z_i} , ($i = 1, \dots, t$). Din (2.6) obținem $(D_i^2) \leq 0$. Dacă pentru un i $(D_i^2) < 0$, atunci pentru cel puțin o componentă E a lui D_i vom avea $(D_i \cdot E) < 0$. Cum fibra F_{z_i} este în mod necesar reductibilă (deoarece $(D_i^2) < 0$ cf. (2.6)), avem de asemenea $(E^2) < 0$. Ținînd cont de (7.15.1) avem:

$$(K \cdot E) = \sum_{j=1}^s b_j (F_{y_j} \cdot E) + \sum_{k=1}^t (D_k \cdot E) = (D_i \cdot E) < 0.$$

Însă $(E^2) < 0$ și $(K \cdot E) < 0$ (E integră) implică E curbă excepțională de prima specie, ceea ce contrazice faptul că f este fibrare minimală.

Prin urmare am arătat că $(D_i^2) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, t$. După (2.6) rezultă că D_i este multiplu rațional de fibra F_{z_i} . Aceasta nu probează altceva decît relația

$$(7.15.2) \quad \omega_X \cong f^*(M) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right), \quad 0 \leq a_i < m_i, \quad a_i \in \mathbb{Z},$$

cu M un O_B -modul inversibil.

$$(7.15.3) \text{ Afirmație. } f_* O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right) \cong O_B \text{ dacă } 0 \leq a_i < m_i.$$

Ținînd cont de incluziunile $O_B = f_* O_X \subseteq f_* O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right) \subseteq f_* O_X \left(\sum_{i=1}^r (m_i - 1) P_i \right)$ (deduse din incluziunile $O_X \subseteq O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right) \subseteq O_X \left(\sum_{i=1}^r (m_i - 1) P_i \right)$), va fi suficient să demonstrăm că

$f_* O_X \left(\sum_{i=1}^r (m_i - 1) P_i \right) \cong O_B$. Problema fiind locală pe B , ultima relație revine la $f_* O_X((m_i - 1) P_i) \cong O_B$, ($i = 1, \dots, r$). Însă $f_* O_X((m_i - 1) P_i) \cong O_B(b_i) \otimes f_* O_X(-P_i)$ (formula proiecției), deci pentru a obține izomorfismul dorit va fi suficient să știm că $f_* O_X(-P_i) \cong O_B(-b_i)$. Din incluziunile $O_B(-b_i) \subset f_* O_X(-P_i) \subseteq O_B$ rezultă că este suficient să arătăm că omomorfismul injectiv $f_*(u): f_* O_X(-P_i) \rightarrow f_* O_X = O_B$ (indus de incluziunea $u: O_X(-P) \hookrightarrow O_X$) nu este izomorfism. Considerăm în acest sens diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} (f_* O_X(-P_i))^{\otimes m_i} & \longrightarrow & f_* O_X(-m_i P_i) \cong O_B(-b_i) \\ (f_*(u))^{\otimes m_i} \downarrow & & \downarrow f_*(u^{\otimes m_i}) \\ (f_* O_X)^{\otimes m_i} & \xrightarrow{\sim} & f_*(O_X^{\otimes m_i}) \cong O_B \end{array}$$

Dacă $f_*(u)$ ar fi izomorfism, atunci prima săgeată verticală ar fi izomorfism; cum a doua săgeată verticală este totdeauna injectivă, ar rezulta atunci că ea este chiar un izomorfism, și deci am deduce că un O_B -modul inversibil de grad -1 este izomorf cu O_B , fapt evident absurd. Afirmația (7.15.3) este dovedită.

Din (7.15.2), (7.15.3) și formula proiecției obținem:

$$(7.15.4) \quad f_*(\omega_X) \cong M.$$

Pentru a determina pe M este nevoie să amintim teorema de dualitate Grothendieck pentru morfismul f . Ținând cont că X și B sînt proiective și nesingulare, iar fibrele lui f sînt curbe pe X (deci scheme Gorenstein), f este un morfism proiectiv și Gorenstein; deci complexul dualizant al lui f se reduce la O_X -modulul inversibil (vezi Hartshorne [2]) $\omega_{X/B} = \omega_X \otimes f^*(\omega_B^{-1})$.

Dacă L' este un O_X -modul inversibil, atunci teorema de dualitate relativă la f afirmă că există un izomorfism canonic

$$\begin{aligned} f_*(L') &\cong \mathcal{H}om_{O_B}(R^1 f_*(L'^{-1} \otimes \omega_{X/B}), O_B) \cong (\text{formula proiecției}) \\ &\cong \mathcal{H}om_{O_B}(R^1 f_*(L'^{-1} \otimes \omega_X) \otimes \omega_B^{-1}, O_B) \cong \\ &\cong \mathcal{H}om_{O_B}(R^1 f_*(L'^{-1} \otimes \omega_X), \omega_B). \end{aligned}$$

Aplicînd această teoremă lui $L' = {}^* \omega_X$, obținem :

$$(7.15.5) \quad f_*(\omega_X) \cong \mathcal{H}om_{O_B}(R^1 f_* O_X, \omega_B) \cong \mathcal{H}om_{O_B}(L, \omega_B) \cong L^{-1} \otimes \omega_B,$$

deoarece $R^1 f_* O_X = L \oplus T$ și dualul părții de torsiune este nul.

Formula (7.15.2) devine ținînd cont de (7.15.5) și (7.15.4) :

$$\omega_X \cong f^*(L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right), \quad 0 \leq a_i < m_i.$$

Considerăm acum șirul spectral Leray :

$$E_2^{p,q} = H^p(B, R^q f_* O_X) \Rightarrow H^{p+q}(X, O_X).$$

Teorema (5.11) din cap. XV al cărții *Homological Algebra* de Cartan-Eilenberg, Princeton Univ. Press, 1956, implică existența șirului exact :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(O_B) \rightarrow H^1(O_X) \rightarrow H^0(R^1 f_* O_X) \rightarrow H^2(O_B) = 0 \rightarrow \\ \rightarrow H^2(O_X) \rightarrow H^1(R^1 f_* O_X) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

de unde obținem :

$$\begin{aligned} \chi(O_X) = \dim H^0(O_X) - \dim H^1(O_X) + \dim H^2(O_X) = \dim H^0(O_B) - \\ - \dim H^1(O_B) - \dim H^0(L \oplus T) + \dim H^1(L \oplus T) = \chi(O_B) - \chi(L) - \\ - \dim H^0(T) = - \deg(L) - l(T), \end{aligned}$$

de unde :

$$\deg(L) = - \chi(O_X) - l(T).$$

Ținînd cont că $\deg(\omega_B) = 2p_a(B) - 2$ am obținut deci condiția d) din enunțul teoremei.

Rămîne doar de demonstrat punctul c). Acesta rezu ltă din :

(7.15.6) LEMĂ. În notațiile lui (7.15), fie α_i ordinul lui $O_X(P_i) \otimes O_{P_i}$ în Pic (P_i) . Atunci :

a) α_i divide pe m_i și pe $a_i + 1$.

b) $\dim H^0(P_i, O_{(\alpha_i+1)P_i}) \geq 2$ și $\dim H^0(P_i, O_{\alpha_i P_i}) = 1$.

c) $n \mapsto \dim H^0(P_i, O_{nP_i})$ este o funcție [crescătoare] [de] n .

În particular, dacă $a_i < m_i - 1$, atunci $\alpha_i < m_i$ și deci fibra $m_i P_i$ este excepțională.

Demonstrație. Pentru simplitate vom nota m, P, a, α în loc de m_i, P_i, a_i, α_i respectiv. Presupunem $m > n \geq 1$. Atunci surjecția $O_{mP} \rightarrow O_{nP} \rightarrow 0$ induce surjecția $H^1(P, O_{mP}) \rightarrow H^1(P, O_{nP}) \rightarrow 0$, deci funcția $n \mapsto \dim H^1(P, O_{nP})$ este crescătoare. Însă teorema Riemann-Roch și faptul că nP este divisor de tip canonic arată că $\chi(O_X(-nP)) = \chi(O_X)$, iar din șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(-nP) \rightarrow O_X \rightarrow O_{nP} \rightarrow 0$$

deducem $\chi(O_{nP}) = 0$. Deci $\dim H^0(P, O_{nP}) = \dim H^1(P, O_{nP})$ și punctul c) este dovedit.

Din definiția lui α obținem izomorfismul $O_X(\alpha P) \otimes O_P \cong O_P$ și deci șirul exact:

$$0 \rightarrow O_P \rightarrow O_{(\alpha+1)P} \rightarrow O_{\alpha P} \rightarrow 0$$

care induce șirul exact de coomologie:

$$0 \rightarrow H^0(O_P) = k \rightarrow H^0(O_{(\alpha+1)P}) \xrightarrow{\text{restricție}} H^0(O_{\alpha P}).$$

care arată că $\dim H^0(O_{(\alpha+1)P}) \geq 2$.

Pe de altă parte, dacă $1 \leq j < \alpha$, atunci $L_j = O_X(-jP) \otimes O_P$ este un O_P -modul inversibil cu proprietatea că gradul său pe fiecare componentă a lui P este nul. Cum L_j nu poate fi izomorf cu O_P , atunci (7.8) arată că $H^0(L_j) = 0$. Deci șirul exact

$$0 \rightarrow L_j \rightarrow O_{(j+1)P} \rightarrow O_{jP} \rightarrow 0$$

induce injecția $0 \rightarrow H^0(O_{(j+1)P}) \rightarrow H^0(O_{jP})$. Izomorfismul $H^0(O_{\alpha P}) \cong k$ se demonstrează prin inducție după j , deoarece după (7.8) avem izomorfismul $H^0(O_P) \cong k$. Cu aceasta am dovedit și punctul b) din (7.15.6).

În fine, avem izomorfismele:

$$(O_X(P) \otimes O_P)^m \cong O_P \text{ (evident)}$$

$$O_X((a+1)P) \otimes O_P \cong \omega_P.$$

unde al doilea izomorfism decurge din (7.15.2) și formula de adjuncție. Din definiția ordinului rezultă atunci că α divide pe m și pe

$a + 1$. Lema (7.15.6) este demonstrată, și cu aceasta teorema (7.15) este complet demonstrată.

(7.16) COROLAR. În ipotezele teoremei (7.15), $(K^2) = 0$, unde K este clasa canonică a lui X .

(7.17) COROLAR. În ipotezele și notațiile lui (7.15) și (7.15.6), dacă $\dim H^1(O_X) \leq 1$, atunci $a_i + 1 = m_i$ sau $\alpha_i + a_i + 1 = m_i$.

Demonstrație. În demonstrația lemei (7.15.6) am văzut că $\chi(O_{(\alpha+1)P}) = 0$ ($\alpha = \alpha_i$, $m = m_i$, ...), iar din enunțul aceleiași leme — că $\dim H^0(P, O_{(\alpha+1)P}) \geq 2$; deci folosind teorema de dualitate pe curba $(\alpha + 1)P$, obținem:

$$\dim H^0(P, \omega_{(\alpha+1)P}) = \dim H^1(P, \omega_{(\alpha+1)P}) = \dim H^0(P, O_{(\alpha+1)P}) \geq 2.$$

Șirul exact

$$0 \rightarrow \omega_X \rightarrow O_X((\alpha + 1)P) \otimes \omega_X \rightarrow \omega_{(\alpha+1)P} \rightarrow 0$$

induce șirul exact de coomologie

$$0 \rightarrow H^0(\omega_X) \rightarrow H^0(O_X((\alpha + 1)P) \otimes \omega_X) \rightarrow H^0(\omega_{(\alpha+1)P}) \rightarrow H^1(\omega_X)$$

de unde:

$$\begin{aligned} \dim H^0(O_X((\alpha + 1)P) \otimes \omega_X) + \dim H^1(\omega_X) &\geq \dim H^0(\omega_X) + \\ &+ \dim H^0(\omega_{(\alpha+1)P}) \geq 2 + \dim H^0(\omega_X). \end{aligned}$$

Deoarece $\dim H^1(\omega_X) = \dim H^1(O_X) \leq 1$ prin ipoteză, obținem:

$$\dim H^0(O_X((\alpha + 1)P) \otimes \omega_X) > \dim H^0(\omega_X).$$

Însă $\omega_X \cong f^*(M) \otimes O_X(aP) \otimes \dots$, cu $M = f_*(\omega_X)$ și ținând cont de (7.15.3) obținem:

$$f_*(O_X((\alpha + 1)P) \otimes \omega_X) \cong \begin{cases} M & \text{dacă } \alpha + a + 1 < m, \\ M \otimes O_B(\beta b), & \text{dacă } \alpha + a + 1 \geq m, \end{cases}$$

unde $\beta > 0$ este cîțul împărțirii lui $\alpha + a + 1$ la m (nu neapărat eu restul zero). Inegalitatea de mai sus se mai poate transcrie în cazul cînd $\alpha + a + 1 < m$:

$$\dim H^0(f_*(O_X((\alpha + 1)P) \otimes \omega_X)) = \dim H^0(M) > \dim H^0(M),$$

ceea ce este absurd. Deci întotdeauna avem $\alpha + \alpha + 1 \geq m$, sau încă $1 + (\alpha + 1)/\alpha \geq m/\alpha$. Cum $(\alpha + 1)/\alpha \leq m/\alpha$, rezultă $(\alpha + 1)/\alpha = m/\alpha$, sau $1 + (\alpha + 1)/\alpha = m/\alpha$. Q.E.D.

(7.18) TEOREMĂ. Fie $f: X \rightarrow B$ o fibrare cvasieliptică. Atunci caracteristica corpului de bază k este 2 sau 3. În plus, fibra generală a lui f este o curbă rațională proiectivă avînd o singură singularitate, care este punct cuspidal ordinar.

Demonstrație. Dacă $b \in B$ este un punct închis astfel încît fibra F_b este integră, atunci $p_a(F_b) = 1$ și F_b curbă cu singularități implică (vezi Serre [3], chap. IV) că F_b este o curbă rațională cu o singură singularitate care este :

- punct cuspidal ordinar, sau
- punct dublu cu tangente distincte (punct dublu ordinar).

Vom demonstra că a doua posibilitate nu se realizează pentru nici-o fibră F_b a fibrării cvasieliptice $f: X \rightarrow B$. Notăm prin Σ mulțimea punctelor $x \in X$ în care f nu este neted. Scoțînd punctele $b_i \in B$ pentru care fibrele F_{b_i} nu sînt integrale, punem $\Sigma_0 = \Sigma \cap f^{-1}(B - \{b_1, \dots, b_n\})$. Dacă t este un parametru local pe B în punctul $b = f(x)$, cu $x \in \Sigma_0$, și u, v , sînt parametri locali (regulați, ca și t) pe X în punctul x , atunci f este dată de o serie formală $f(u, v) \in k[[u, v]]$ (corespunzătoare omomorfismului local completat $k[[t]] = \hat{O}_{B,b} \rightarrow k[[u, v]] = \hat{O}_{X,x}$). Deoarece fibra F_b este integră, seria $f(u, v)$ are forma :

— $f(u, v) = U(u, v) \cdot (u^2 + v^3)$ cu $U(0, 0) \neq 0$, cînd x este punct cuspidal ordinar pentru F_b , sau

— $f(u, v) = U(u, v) \cdot u \cdot v$, cu $U(0, 0) \neq 0$, cînd x este punct dublu ordinar pentru F_b .

Deoarece Σ_0 este dată în jurul lui x de ecuațiile $\partial f / \partial u = \partial f / \partial v = 0$, avem în cazul al doilea

$$\partial f / \partial u = (\text{unitate}) \cdot v, \quad \partial f / \partial v = (\text{unitate}) \cdot u,$$

și deci x este un punct izolat al lui Σ_0 . Însă de aici rezultă (ținînd cont de definiția lui Σ_0 și de faptul că f este morfism propriu) că există un deschis $V \subseteq B - \{b_1, \dots, b_n\}$ ce conține pe b astfel încît restricția lui f la $f^{-1}(V)$ să fie un morfism neted în $f^{-1}(V) - \{x\}$, fapt imposibil într-o fibrare cvasieliptică.

Am dovedit deci că pentru orice $b \in B - \{b_1, \dots, b_n\}$, fibra F_b este o curbă integră cu o singură singularitate, care este punct cuspidal ordinar. Atunci Σ_0 este locul geometric al tuturor acestor puncte cuspidale din $f^{-1}(B - \{b_1, \dots, b_n\})$. Atunci $f(u, v)$ are forma :

$$f(u, v) = U(u, v) \cdot (u^2 + v^3), \quad U(0, 0) \neq 0.$$

Presupunind acum $\text{car}(k) \neq 2$, avem $\partial f / \partial u = 2u \cdot U(u, v) + V(u, v)$, $\text{ord}(V) \geq 2$, și deci ecuația $\partial f / \partial u = 0$ definește în jurul lui x o curbă nesingulară ce conține pe Σ_0 . Rezultă atunci că $\partial f / \partial u = 0$ este chiar o ecuație locală pentru curba Σ_0 în jurul lui x și că Σ_0 este nesingulară în fiecare punct al său. În plus, restricția lui f la Σ_0 este o bijecție pe $B - \{b_1, \dots, b_n\}$. Multiplicitatea de intersecție $(\Sigma_0 \cdot F_b)$, $b \in B - \{b_1, \dots, b_n\}$, se calculează imediat:

$$\begin{aligned} (\Sigma_0 \cdot F_b)_x &= \dim (O_{\Sigma_0, x} / m_{B, b} O_{\Sigma_0, x}) = \dim k[[u, v]] / (f, \partial f / \partial u) = \\ &= \dim k[[u, v]] / (u^2 + v^3, u) = \dim k[[v]] / (v^3) = 3. \end{aligned}$$

De aici rezultă $\text{car}(k) = 3$, deoarece extinderea $k(B) \hookrightarrow k(\Sigma_0)$ fiind finită și pur neseparabilă, are gradul p^m , $m \geq 1$, $p = \text{car}(k)$. În plus, $p^m = (\Sigma_0 \cdot F_b)$, $b \in B - \{b_1, \dots, b_n\}$, deci $p^m = 3$, adică $p = 3$. Q.E.D.

(7.19) *Remarcă.* Pe de altă parte, în caracteristică 2 sau 3 apar efectiv exemple de fibrări cvasieliptice (vezi Bombieri-Mumford [2]).

(7.20) *Referințe bibliografice.* Teorema (7.1), lema (7.2) și corolarul (7.3) sunt prezentate după Șafarevici [2], iar propoziția (7.4) după Hartshorne [1]. Noțiunea de curbă de tip canonic a fost introdusă de Mumford [4], după care am prezentat teorema (7.8), corolarele (7.9) și (7.10) și teoremele (7.11) și (7.12). Noțiunea de fibră excepțională a unei fibrări eliptice sau cvasieliptice apare pentru prima dată în Bombieri-Mumford [1], după care am prezentat teorema (7.15) și corolarul (7.17). Teorema (7.18) provine din Mumford [4] și Bombieri-Mumford [2].

§ 8.

DIMENSIUNEA CANONICĂ A UNEI FIBRĂRI ELIPTICE SAU CVASIELIPTICE

Fie $f: X \rightarrow B$ o fibrare eliptică sau cvasieliptică. Teorema (7.15) exprimă fasciculul dualizant ω_X al lui X sub forma

$$\omega_X = f^*(L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right), \quad 0 \leq a_i < m_i.$$

Dacă $n \geq 1$ este un multiplu comun al numerelor m_1, \dots, m_r , obținem:

$$\begin{aligned} \omega_X^n &= f^*(L^{-n} \otimes \omega_B^n) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i n P_i \right) = \\ &= f^* \left(L^{-n} \otimes \omega_B^n \otimes O_B \left(\sum_{i=1}^r a_i / m_i \cdot n b_i \right) \right). \end{aligned}$$

Din aceeași teoremă mai rezultă:

(8.1) PROPOZIȚIE. Dacă $n \geq 1$ este un multiplu comun al lui m_1, \dots, m_r , atunci $H^0(X, \omega_X^n) = H^0(B, L^{-n} \otimes \omega_B^n \otimes O_B \left(\sum_{i=1}^r a_i / m_i \cdot n b_i \right))$, cu $\deg \left(L^{-n} \otimes \omega_B^n \otimes O_B \left(\sum_{i=1}^r a_i / m_i \cdot n b_i \right) \right) = n(2p_a(B) - 2) + n\chi(O_X) + nl(T) + \sum_{i=1}^r n a_i / m_i$.

(8.2) Fie acum X o suprafață minimală arbitrară. Atunci X aparține uneia și numai uneia din următoarele patru clase de suprafețe minimale (caracterizate de proprietățile):

a) Există o curbă integră C pe X astfel încât $(K \cdot C) < 0$.
 b) Pentru orice curbă integră C pe X avem $(K \cdot C) = 0$ și deci $(K^2) = 0$. Altfel spus, $K \approx 0$.

c) $(K^2) = 0$ și pentru orice curbă integră C pe X avem $(K \cdot C) \geq 0$ și în plus există o curbă integră C' cu proprietatea $(K \cdot C') > 0$.

d) $(K^2) > 0$ și $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă integră C pe X .

Într-adevăr, teoretic vorbind ar mai fi de considerat și cazul când $(K^2) < 0$ și $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă integră C pe X . Însă după (1.25) această situație este imposibilă. Mai observăm că a fost esențial faptul că ne-am mărginit la a considera doar modele minimale pentru a delimita cele patru clase; într-adevăr, dacă X nu ar fi model minimal, fie C o curbă excepțională de prima specie pe X . Atunci avem $(K \cdot C) = -1 < 0$.

(8.3) *Observații.* Fie X o suprafață minimală.

a) Dacă X aparține clasei a), atunci $c(X) = -1$, adică $p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

b) Dacă X aparține clasei b), atunci $c(X) \leq 0$.

c) Dacă în plus X admite o structură eliptică sau evasieliptică $f: X \rightarrow B$ și dacă în notațiile lui (8.1) notăm prin $\lambda(f) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + \sum_{i=1}^r a_i/m_i + l(T)$, atunci X nu poate aparține clasei

d) și în plus avem:

i) X aparține clasei a) dacă și numai dacă $\lambda(f) < 0$, și atunci $c(X) = -1$.

ii) X aparține clasei b) dacă și numai dacă $\lambda(f) = 0$, și atunci $c(X) \leq 0$.

iii) X aparține clasei c) dacă și numai dacă $\lambda(f) > 0$, sau dacă și numai dacă $c(X) = 1$.

Demonstrație. c) rezultă imediat din (8.1), (5.9) și (5.10).

a) Fie C o curbă integră cu proprietatea $(K \cdot C) < 0$. Atunci pentru orice divizor $D \in \text{Div}(X)$ există un $n_D \in \mathbb{Z}$ astfel încât $|D + nK| = \emptyset$ pentru orice $n \geq n_D$. Într-adevăr, deoarece $(K \cdot C) < 0$, există un $n_D \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n(K \cdot C) < -(D \cdot C)$ pentru orice $n \geq n_D$. Fie $\Delta \in |D + nK|$, cu $n \geq n_D$; atunci $(\Delta \cdot C) = (D \cdot C) + n(K \cdot C) < 0$. Cum $\Delta \geq 0$, rezultă atunci $(C^2) < 0$. Însă $(C^2) < 0$ și $(K \cdot C) < 0$ implică imediat (cu ajutorul formulei genului) că C este curbă excepțională de prima specie, ceea ce nu este posibil. Deci $|D + nK| = \emptyset$ pentru orice $n \geq n_D$.

Luînd în particular $D = K$, rezultă că există un $n_0 = n_K$ astfel încât $|nK| = \emptyset$ pentru orice $n \geq n_0$. Cum $R(X)$ este un domeniu de integritate (și deci $p_{mn} = 0$ implică $p_m = 0$, cu m și n numere naturale), deducem deci că $p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

b) Dacă X aparține clasei b) avem de demonstrat (cf. (5.10)) că $p_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 1$. Dacă prin absurd ar exista un $n \geq 1$ cu $p_n \geq 2$, atunci $\dim |nK| \geq 1$, deci ar exista un divizor $0 < \Delta \in |nK|$. Însă dacă H este o secțiune hiperplană avem $(\Delta \cdot H) > 0$, deci o componentă C a lui H ar avea încă proprietatea $(\Delta \cdot C) > 0$, adică $n(K \cdot C) > 0$, deci $(K \cdot C) > 0$, absurd. Q.E.D.

(8.4) Fie acum X o suprafață minimală arbitrară cu proprietățile $(K^2) = 0$ și $p_g \leq 1$ (după (8.3) b) orice suprafață minimală aparținând clasei b) are această proprietate). Formula lui Noether devine în acest caz

$$10 - 8q + 12p_g = b_2 + 2\Delta.$$

Cum $p_g \leq 1$, $0 \leq \Delta \leq 2p_g$ și $\Delta = 2(q - s)$ este număr par (cf. (5.1)), rezultă că Δ poate lua numai una din valorile 0 sau 2. Folosind aceste observații este imediat de văzut că relația de mai sus poate fi satisfăcută numai în următoarele situații:

1. $b_2 = 22, b_1 = 0, \chi(O_X) = 2, q = 0, p_g = 1$ și $\Delta = 0$.
2. $b_2 = 14, b_1 = 2, \chi(O_X) = 1, q = 1, p_g = 1$, și $\Delta = 0$.
3. $b_2 = 10, b_1 = 0, \chi(O_X) = 1, \begin{cases} q = 0, p_g = 0 \text{ și } \Delta = 0, & \text{sau} \\ q = 1, p_g = 1, \text{ și } \Delta = 2. \end{cases}$
4. $b_2 = 6, b_1 = 4, \chi(O_X) = 0, q = 2, p_g = 1$ și $\Delta = 0$.
5. $b_2 = 2, b_1 = 2, \chi(O_X) = 0 \begin{cases} q = 1, p_g = 0 \text{ și } \Delta = 0, & \text{sau} \\ q = 2, p_g = 1, \text{ și } \Delta = 2. \end{cases}$

(8.5) *Remarcă.* Dacă X aparține clasei b) și $p_g = 1$, atunci $K \sim 0$ (adică $\omega_X \cong O_X$), deoarece $\omega_X \approx 0$ și $H^0(\omega_X) \neq 0$ implică $\omega_X \cong O_X$.

(8.6) **TEOREMĂ.** Dacă X este o suprafață minimală aparținând clasei b) și avînd $b_2 = 2$, atunci $b_1 = 2$ și deci $\text{Alb}(X)$ este o curbă eliptică, iar fibrele morfismului Albanese $f: X \rightarrow B = \text{Alb}(X)$ sînt sau toate curbe eliptice nesingulare, sau toate curbe raționale cu cîte o singură singularitate care este punct cuspidal ordinar. Ultima situație poate apare numai în caracteristica 2 sau 3.

Demonstrație. Din tabelul de mai sus rezultă că $b_2 = 2$ implică $b_1 = 2$, deci $s = 1$. Din teorema (5.3) rezultă că $\dim \text{Alb}(X) = s = 1$, și deci $B = \text{Alb}(X)$ este o curbă eliptică. Fie $b \in B$ un punct închis și $F = F_b = f^{-1}(b)$. Formula genului implică $p_a(F) = 1$, deoarece $(F^2) = (K \cdot F) = 0$. Prin urmare $f: X \rightarrow B$ este o fibrare eliptică sau cvasieliptică. Ultima afirmație decurge din teorema (7.18). Ca să arătăm că toate fibrele lui f sînt ireductibile folosim următoarea:

(8.7) LEMĂ. *Fie $f: X \rightarrow B$ o fibrare cu proprietatea $f_* O_X \cong O_B$. Atunci $\rho = \text{rang } NS(X) \geq 2$, iar dacă $\rho = 2$, atunci toate fibrele lui f sînt ireductibile.*

Acceptînd pentru moment această leamă, observăm că inegalitatea Igusa-Severi $\rho \leq b_2 = 2$, implică conform lemei (8.7), $\rho = 2$ (datorită existenței fibrării $f: X \rightarrow B = \text{Alb}(X)$), și că toate fibrele lui f sînt ireductibile.

Tot din tabelul de la (8.4) citim că $\chi(O_X) = 0$, și deoarece $p_a(B) = 1$, avem, în notațiile propoziției (8.1):

$$\deg(L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T) = l(T) \geq 0.$$

Cum $\omega_X = f^*(L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r a_i P_i \right)$, deducem că pentru orice punct închis $y \in B$ avem (ținînd cont că $\omega_X \approx 0$):

$$l(T) \cdot f^{-1}(y) + \sum_{i=1}^r a_i P_i \approx 0.$$

Cum acest divizor este ≥ 0 , el poate fi numeric echivalent cu zero numai cînd este egal cu zero, deci $l(T) = 0$ și $a_i = 0$ pentru orice i . Însă $l(T) = 0$ implică $a_i = m_i - 1$ (cf. (7.15)), deci $m_i = 1$ pentru orice i . Altfel spus, fibrarea Albanese $f: X \rightarrow B$ nu are fibre multiple.

Am dovedit pînă acum că toate fibrele lui f sînt curbe integrale. Dacă fibra generală a lui f (sau echivalent, una din fibrele închise ale lui f) este nesesingulară, fie $\omega \in \Gamma(\omega_B)$ o formă diferențială nenulă și regulată pe B . Atunci $f^*(\omega)$ se anulează exact în punctele în care morfismul f nu este neted. Rezultă că mulțimea punctelor în care $f^*(\omega)$ se anulează este o mulțime finită sau vidă. În particular, $\text{div}_X(f^*(\omega))$ este nul. Cum $\omega_X \approx 0$, avem din formula lui Igusa (vezi Igusa [1]):

$$c_2 = \deg \langle f^*(\omega) \rangle + (\text{div}_X f^*(\omega)) \cdot \omega_X - (\omega_X \cdot \omega_X) = \deg \langle f^*(\omega) \rangle,$$

unde prin $\langle f^*(\omega) \rangle$ am notat 0-ciclul asociat 1-formei $f^*(\omega)$,

adică suma formală a tuturor punctelor în care $f^*(\omega)$ se anulează, luate cu multiplicitățile respective (*loc. cit.*). Cum $b_2 = b_1 = 2$, rezultă $c_2 = 2 - 2b_1 + b_2 = 0$, deci $f^*(\omega)$ nu se anulează în nici-un punct al lui X , adică f este morfism neted. Teorema (8.6) este demonstrată modulo lema (8.7).

Demonstrația lemei (8.7). Fie F' o fibră închisă arbitrară a lui f și H o secțiune hiperplană arbitrară pe X . Deoarece $(F'^2) = 0$ și $(H^2) > 0$, clasele lui F' și H în $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sînt linear independente, deci $\rho \geq 2$.

Presupunînd că ar exista o fibră reductibilă de forma $F = a_1 E_1 + \dots + a_n E_n$, $a_i \geq 1$ întregi și pentru $i \neq j$ E_i este diferită de E_j , iar E_1, \dots, E_n sînt componentele ireductibile ale lui F , atunci din (2.6) avem că $(E_1^2) < 0$. Deci clasele lui E_1 și F' în $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sînt linear independente. Cum $\rho = 2$, există $a, b \in \mathbb{Q}$ astfel încît $H \approx aE_1 + bF'$. Însă $(H^2) = a^2(E_1^2) + 2ab(E_1 \cdot F') + b^2(F'^2) = a^2(E_1^2) \leq 0$, deoarece avem în mod evident $(E_1 \cdot F') = (F'^2) = 0$. Am obținut deci o absurditate, ceea ce demonstrează lema (8.7).

(8.8) DEFINIȚIE. O suprafață minimală aparținînd clasei b) și avînd $b_2 = 2$ se numește *hipereliptică* dacă fibrele morfismului Albanese sînt toate curbe eliptice nesingulare.

(8.9) DEFINIȚIE. O suprafață minimală X aparținînd clasei b) și avînd $b_2 = 2$ se numește *cvasihipereliptică* dacă fibrele morfismului Albanese sînt toate curbe raționale cu cîte un singur punct singular, care este punct cuspidal ordinar.

(8.10) TEOREMĂ. Fie $f: X \rightarrow B = \text{Alb}(X)$ o fibrare hipereliptică sau cvasihipereliptică. Atunci există o altă fibrare eliptică $g: X \rightarrow P^1$, a lui X peste dreapta proiectivă P^1 .

Demonstrație. Arătăm mai întîi că este suficient să construim o curbă C indecompozabilă de tip canonic astfel încît $(C \cdot F_t) > 0$ pentru orice $t \in B$, cu $F_t = f^{-1}(t)$.

Într-adevăr, presupunînd că am construit pe C cu proprietatea de mai sus și aplicînd teorema (7.11), găsim o fibrare eliptică sau cvasieliptică $g: X \rightarrow B'$ pentru care $(F_t \cdot F_{t'}) > 0$ pentru orice $t \in B$ și orice $t' \in B'$, cu $F_{t'} = g^{-1}(t')$. Dacă g ar fi o fibrare cvasieliptică, atunci fibra generală $F_{t'}$ ar fi o curbă rațională și deci $f(F_{t'})$ ar fi un punct pe B deoarece B este curbă eliptică. Deci $F_{t'} \subseteq F_t$ pentru un $t \in B$, fapt ce contrazice inegalitatea $(F_t \cdot F_{t'}) > 0$. Deci g este în mod necesar o fibrare eliptică. Deoarece $\omega_X \approx 0$, după (8.3) c), avem

$\lambda(g) = 2p_a(B') - 2 + \chi(O_X) + l(T') + \sum_{i=1}^r a_i/m_i = 0$, de unde $p_a(B') \leq 1$. Dacă $p_a(B') = 1$, din proprietatea de universalitate a

varietății Albanese rezultă că există un morfism $h: B \rightarrow B'$ astfel încât $h \circ f = g$, fapt ce din nou contrazice inegalitatea $(F_t \cdot F_t) > 0$. Deci $p_a(B') = 0$, adică $B' = P^1$.

Rămâne de construit o curbă C de tip canonic astfel încât $(C \cdot F_t) > 0$.

Fie acum H o secțiune hiperplană pe X și D un divizor de forma $D = aH + bF_0$, cu a și b întregi și F_0 fibra lui f deasupra unui punct $t_0 \in B$ fixat (t_0 punct închis). Putem determina pe a și b astfel încât

$$(*) \quad (D^2) = 0 \text{ și } (D \cdot F_t) > 0.$$

(De exemplu luând $b = -(H^2)$ și $a = 2(H \cdot F_0)$.)

Fixînd un astfel de divizor D cu proprietățile (*), punem pentru orice punct închis $t \in B$, $D_t = D + F_t - F_0$. Afirmăm că există un $t \in B$ punct închis astfel încît $|D_t| \neq \emptyset$.

Ca să dovedim această afirmație observăm mai întîi că pentru orice $t \in B$ avem $H^2(O_X(D_t)) = 0$. Într-adevăr, după dualitatea Serre avem de probat că $|K - D_t| = \emptyset$ pentru orice t . Dacă pentru un t ar exista un $\Delta \in |K - D_t|$, atunci cum $K - D_t \cong -D_t \cong -D$, am obține $(\Delta \cdot F_0) = -(D \cdot F_0) < 0$, ceea ce este absurd deoarece $\Delta > 0$ și F_0 este o curbă cu $(F_0^2) = 0$.

Acum, dacă afirmația noastră ar fi falsă ar însemna că $H^0(O_X(D_t)) = 0$ pentru orice $t \in B$. Însă din teorema Riemann-Roch deducem imediat că $\chi(O_X(D_t)) = 0$ pentru orice t , de unde, ținînd cont de cele spuse mai sus, rezultă $H^0(O_X(D_t)) = H^1(O_X(D_t)) = 0$ pentru orice $t \in B$. Însă șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(D_t) \rightarrow O_X(D + F_t) \rightarrow O_X(D) \otimes O_{F_t} \rightarrow 0$$

induce șirul exact de coomologie

$$0 = H^0(O_X(D_t)) \rightarrow H^0(O_X(D + F_t)) \xrightarrow{\varepsilon_t} H^0(O_X(D) \otimes O_{F_t}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1(O_X(D_t)) = 0$$

unde ε_t este omomorfismul canonic de restricție.

Cum $(D \cdot F_0) > 0$, există o secțiune netrivială $s \in H^0(F_0, O_X(D) \otimes O_{F_0})$, și fie atunci $s_t = \varepsilon_t^{-1}(s)$. În mod evident (ca și în demonstrația lui (7.12)) avem:

$$X = \text{închiderea } \bigcup_{t \neq t_0} \text{div}(s_t),$$

$\text{div}(s_t) \cap F_0$ are suportul în $\text{div}_{F_0}(s)$ pentru orice $t \neq t_0$.

Rezultă că dacă $t \rightarrow t_0$ avem în mod necesar $\text{div}(s_{t_0}) = F_0 + \Delta \sim F_0 + D$, cu $\Delta \geq 0$. Deci $\Delta \in |D|$, ceea ce este absurd și afirmația este dovedită.

Am demonstrat deci că există un $t \in B$, și un $C \in |D_t|$. Avem $(C^2) = ((D + F_t - F_0)^2) = (D^2) = 0$ și $(C \cdot F_0) = (D + F_t - F_0 \cdot F_0) = (D \cdot F_0) > 0$ (în particular, $C > 0$). Afirmăm că C este de tip canonic. Într-adevăr, fie $C = \sum_{i=1}^n n_i E_i$, cu E_1, \dots, E_n componentele lui C (distincte două câte două) și $n_i \geq 1$. Avem

$$(**) \quad (C \cdot E_j) = \sum_{i \neq j} n_i (E_i \cdot E_j) + n_j (E_j^2).$$

Dacă $E_i = E_j$ este o curbă cu $(E_i^2) < 0$, atunci deoarece $(K \cdot E) = 0$, formula genului implică $p_g(E) = 0$ și $(E^2) = -2$. Vom arăta că în ipotezele teoremei (8.10) asemenea curbe nu pot exista pe X . Într-adevăr, E ar fi conținută într-o fibră a lui f , iar după teorema (8.6) acest lucru este imposibil.

Rezultă deci că în (**) avem $(E_j^2) \geq 0$ pentru orice j , și cum $(E_i \cdot E_j) \geq 0$ dacă $i \neq j$, avem $(C \cdot E_j) \geq 0$ pentru orice j . Cum

$$0 = (C^2) = \sum_{j=1}^n n_j (C \cdot E_j),$$

rezultă că $(C \cdot E_j) = 0$ pentru orice j . Cum pe de altă parte $\omega_X \approx 0$, avem și $(K \cdot E_j) = 0$ și deci C este de tip canonic. Q.E.D.

(8.11) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală ce aparține clasei b) sau clasei c). Atunci $p_4 \neq 0$ sau $p_6 \neq 0$. Mai precis, dacă X aparține clasei b), atunci $4K \sim 0$ sau $6K \sim 0$, iar dacă X aparține clasei c), atunci $|4K|$ sau $|6K|$ este reprezentat de câte un divizor strict pozitiv.

Demonstrație. Din corolarul (7.13) rezultă că dacă X aparține clasei b) sau clasei c), atunci $2K \sim 0$ sau există o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \rightarrow B$ pe X . Cum $2K \sim 0$ implică X aparține clasei b) și $p_2 \neq 0$ (deci $p_4 \neq 0$ și $p_6 \neq 0$), putem presupune că există fibrarea $f: X \rightarrow B$ eliptică sau cvasieliptică pe X . Dacă $p_g > 0$, atunci din nou $p_4 \neq 0$ și $p_6 \neq 0$ și nu am avea nimic de demonstrat. Deci putem presupune în plus că $p_g = 0$. Deoarece $(K^2) = 0$ putem folosi tabelul de la (8.4). Din teorema (7.15) rezultă că

$$p_g = \dim H^0(B, L^{-1} \otimes \omega_B) = 0,$$

cu $\deg(L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T)$. Însă din tabelul de la (8.4) citim că $\chi(O_X) \geq 0$, deci teorema lui Riemann-Roch pe curba B implică $p_a(B) = 1$, $\chi(O_X) = 0$ și $l(T) = 0$, sau $p_a(B) = 0$ și $\chi(O_X) + l(T) < 2$.

Presupunînd mai întîi că $p(B) = 1$, $\chi(O_X) = 0$ și $l(T) = 0$, din teorema (7.15) rezultă că f nu are fibre excepționale și $a_i = m_i - 1$. Dacă f posedă o fibră multiplă $m_1 P_1$, atunci formula

$$\omega_X = f^*(L^{-1} \otimes \omega_B) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r (m_i - 1) P_i \right)$$

ne dă

$$\omega_X^2 = f^*(L^{-2} \otimes \omega_B^2) \otimes f^* O_B(b_1 + \dots) \otimes O_X \left(\sum_{i=1}^r (m_i - 2) P_i \right).$$

Însă deoarece $\deg(L^{-2} \otimes \omega_B^2 \otimes O_B(b_1 + \dots)) \geq 1$ și B este curbă eliptică, rezultă, folosind formula proiecției:

$$p_2 = \dim H^0(\omega_X^2) = \dim H^0(B, L^{-2} \otimes \omega_B^2 \otimes O_B(b_1 + \dots)) \geq 1$$

și atunci $p_4 \neq 0$ și $p_6 \neq 0$ și teorema este din nou dovedită în acest caz. Dacă $p_a(B) = 1$, $\chi(O_X) = 0$ și $l(T) = 0$ rezultă deci că putem presupune în plus că f nu are fibre multiple. Atunci după (7.15) avem

$$\omega_X^v = f^*(L^{-1} \otimes \omega_B)$$

și $\deg(L^{-1} \otimes \omega_B) = 2p_a(B) - 2 + \chi(O_X) + l(T) = 0$. Deci $\omega_X \approx 0$ și prin urmare X aparține clasei b). Însă citind în tabelul din (8.4) vedem că $p_g = 0$ și $\chi(O_X) = 0$ putem avea doar în cazul 5, deci cînd $b_2 = 2$. Altfel spus, X este suprafață hipereliptică sau cvasihipereliptică. Însă după teorema (8.10) există în această situație o altă fibrare $g: X \rightarrow P^1$ eliptică pe X de bază dreapta proiectivă.

Prin urmare, pentru a termina demonstrația teoremei (8.11) rămîne să analizăm situația cînd X posedă o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \rightarrow B$ cu $p_a(B) = 0$ (adică $B = P^1$), și $p_g = 0$, adică $\deg(L^{-1} \otimes \omega_B) = -2 + \chi(O_X) + l(T) < 0$. În plus, cum X aparține clasei b) sau clasei c) rezultă din (8.3) c) că

$$\lambda(f) = -2 + \chi(O_X) + l(T) + \sum_{i=1}^r a_i/m_i \geq 0.$$

Notînd prin $\lambda' = -2 + \chi(O_X) + l(T)$, avem deci $\lambda' < 0$ și $\lambda' + \sum_{i=1}^r a_i/m_i \geq 0$. Deoarece $B = P^1$, avem pentru orice $n \geq 1$:

$$(*) \quad \dim |nK| = n\lambda' + \sum_{i=1}^r [na_i/m_i].$$

unde prin $[u]$ am notat partea întregă a numărului real u .

Deosebim următoarele cazuri:

A) $l(T) = 0$, deci după (7.15) $a_i = m_i - 1$, $\alpha_i = m_i$ (folosind și notațiile lemei (7.15.6)).

Dacă $\chi(O_X) = 0$, avem în mod necesar cel puțin trei fibre multiple $\left(\lambda' = -2 \text{ și } -2 + \sum_{i=1}^r (m_i - 1)/m_i \geq 0 \right)$. Avem următoarele posibilități:

a) Există cel puțin patru fibre multiple, deci $m_i \geq 2$ pentru $i = 1, 2, 3, 4, \dots$. Atunci din (*) rezultă că $|2K| \neq \emptyset$, deci $p_2 \neq 0$.

b) Există exact trei fibre multiple, toate cu $m_i \geq 3$. Atunci rezultă (mereu folosind (*)) $|3K| \neq \emptyset$, deci $p_3 \neq 0$.

c) Există exact trei fibre multiple cu $m_1 = 2$, $m_2, m_3 \geq 4$. Atunci $|4K| \neq \emptyset$.

d) Există exact trei fibre multiple cu $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 \geq 6$. Atunci $|6K| \neq \emptyset$.

În cazul A), dacă $\chi(O_X) = 1$, trebuie să avem $-1 + \sum_{i=1}^r (m_i - 1)/m_i \geq 0$, deci există cel puțin două fibre multiple. Atunci $|2K| \neq \emptyset$.

În cazul A), dacă $\chi(O_X) = 2$, atunci $|K| \neq \emptyset$.

B) $l(T) = 1$. Dacă $\chi(O_X) \geq 1$, atunci $|K| \neq \emptyset$ și nu am mai avea nimic de demonstrat. Putem deci presupune $\chi(O_X) = 0$. Cum $\lambda' = -1$ în acest caz, avem $p_g = 0$. Deducem $q = 1$, și deci se poate aplica (7.17). Deci dacă $f^{-1}(b_1)$ este fibra excepțională, atunci avem $a_1 = m_1 - 1$ sau $a_1 = m_1 - 1 - \alpha_1$, unde α_1 este un divizor comun al lui m_1 și $a_1 + 1$. În plus, există cel puțin două fibre multiple și $a_i = m_i - 1$ dacă $i \geq 2$.

a') Există cel puțin două fibre multiple cu $a_i = m_i - 1$, și atunci avem $|2K| \neq \emptyset$.

b') Fibra excepțională satisface $m_1 = 3$, $a_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$ și $m_2 \geq 3$. Atunci $|3K| \neq \emptyset$.

c') Fibra excepțională satisface $m_1 = 4$, $a_1 = 1$, $\alpha_1 = 2$, iar $m_2 \geq 4$. Atunci $|4K| \neq \emptyset$.

c₂) Fibra excepțională satisface $m_1 = \beta_1 \alpha_1$ cu $\beta_1 \geq 4$. Atunci $a_1/m_1 \geq 1/2$ și $|2K| \neq \emptyset$.

d₁) Fibra excepțională satisface $m_1 = 2 \alpha_1$, $a_1 = \alpha_1 - 1$, $\alpha_1 \geq 3$ și $m_2 \geq 3$. Atunci $|3K| \neq \emptyset$.

d₂) Fibra excepțională satisface $m_1 = 3 \alpha_1$, $a_1 = 2 \alpha_1 - 1$. Atunci $|2K| \neq \emptyset$.

C) $l(T) \geq 2$. Atunci $|K| \neq \emptyset$.

Teorema (8.11) este astfel complet demonstrată.

Ca un corolar al demonstrației teoremei (8.11) (anume al faptului că dacă $p_0 = 0$ și X admite o fibrare eliptică sau cvasieliptică, cu X aparținând clasei b) sau clasei c), atunci $p_2 \neq 0$ sau există o fibrare $f: X \rightarrow P^1$ eliptică sau cvasieliptică de bază P^1) putem deduce imediat următoarea variantă sensibil îmbunătățită a observației (8.3) c):

(8.12). COROLAR. Fie $f: X \rightarrow B$ o fibrare eliptică sau cvasieliptică, unde suprafața X este minimală. Atunci X nu poate aparține clasei d) și avem:

i) X aparține clasei a) $\Leftrightarrow \lambda(f) < 0 \Leftrightarrow c(X) = -1 \Leftrightarrow p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1 \Leftrightarrow p_4 = p_6 = 0 \Leftrightarrow p_{12} = 0$

ii) X aparține clasei b) $\Leftrightarrow \lambda(f) = 0 \Leftrightarrow c(X) = 0 \Leftrightarrow$ există $n \geq 1$ astfel încât $nK \sim 0 \Leftrightarrow 4K \sim 0$ sau $6K \sim 0 \Leftrightarrow 12K \sim 0$.

iii) X aparține clasei c) $\Leftrightarrow \lambda(f) > 0 \Leftrightarrow c(X) = 1 \Leftrightarrow$ există un $n > 0$ astfel încât $|nK|$ conține un divizor strict pozitiv $\Leftrightarrow |4K|$ sau $|6K|$ conține un divizor strict pozitiv $\Leftrightarrow |12K|$ conține un divizor strict pozitiv.

(8.13) Remarcă. O consecință a unui rezultat general al lui Raynaud (cf. Raynaud [1]) afirmă că m_i/α_i este o putere a exponentului caracteristic p al lui k , unde $p = 1$ dacă $\text{car}(k) = 0$ și $p = \text{car}(k)$ dacă $\text{car}(k) > 0$. Acest rezultat arată în particular că multiplicitatea unei fibre excepționale se divide cu p , iar pe de altă parte dacă $\text{car}(k) = 0$, atunci ținând cont și de (7.15.6) rezultă că nu pot apărea fibre excepționale în nici-o fibrare eliptică.

În plus, aceeași consecință a rezultatului lui Raynaud mai arată: cazul b') din demonstrația lui (8.11) poate apărea doar în car 3, cazul c₁), doar în car 2, iar cazul d₂) doar în car 3. Cu toate că acest rezultat este interesant în sine, el nu va fi folosit în continuare, așa încît nu dăm demonstrația sa.

(8.14) Referințe bibliografice. Întregul material din acest paragraf este prezentat după Bombieri-Mumford [1].

§ 9.

TEOREMA DE CLASIFICARE
DUPĂ DIMENSIUNEA CANONICĂ

(9.1) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală aparținând clasei d), adică $(K^2) > 0$ și $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă C de pe X . Atunci $|2K| \neq \emptyset$, iar pentru n suficient de mare sistemul linear $|nK|$ nu are puncte bază și definește un morfism $\varphi_n = \varphi_{|nK|} : X \rightarrow |nK|$ cu proprietățile următoare: imaginea $X_n = \varphi_n(X)$ este o suprafață normală avînd drept singularități cel mult puncte raționale duble și φ_n este un izomorfism între $X - \varphi_n^{-1}(\text{Sing}(X_n))$ și $X_n - \text{Sing}(X_n)$, unde prin $\text{Sing}(X_n)$ am notat locul singular al lui X_n . În acest caz dimensiunea canonică a lui X este egală cu 2, iar inelul canonic $R(X)$ este o k -algebră finit generată (și de grad de transcendență 3 peste k).

Demonstrație. Arătăm mai întîi că $|2K| \neq \emptyset$. Dacă prin absurd $|2K| = \emptyset$ (adică $p_2 = 0$), atunci după (5.1) avem $\Delta = 0$ și deci formula lui Noether devine :

$$10 = (K^2) + 8q + b_2,$$

de unde deducem $q \leq 1$. Pe de altă parte, teorema lui Riemann-Roch se scrie

$$(9.1.1) \quad \chi(O_X(2K)) = (K^2) + \chi(O_X).$$

Folosind dualitatea Serre avem

$$\begin{aligned} \chi(O_X(2K)) &= \dim H^0(O_X(2K)) + \dim H^0(O_X(-K)) - \\ &\quad - \dim H^1(O_X(2K)) = -\dim H^1(O_X(2K)) \leq 0, \end{aligned}$$

deoarece $H^0(O_X(2K)) = 0$ prin ipoteză și $|-K| = \emptyset$ (într-adevăr, dacă $|-K| \neq \emptyset$, ar exista un $0 < \Delta \in |-K|$; există atunci o curbă integră C pe X astfel încît $(\Delta \cdot C) > 0$, și atunci avem $(K \cdot C) = -(\Delta \cdot C) < 0$, ceea ce contrazice ipotezele teoremei). Introducînd (9.1.1) în inegalitatea $\chi(O_X(2K)) \leq 0$ și ținînd cont că $\chi(O_X) = 1 - q + p_g = 1 - q \geq 0$, obținem inegalitatea $(K^2) + (1 - q) \leq 0$, de unde $(K^2) \leq 0$, contradicție. Deci în mod necesar avem $|2K| \neq \emptyset$.

Trecem acum la analiza sistemului linear complet $|nK|$ cu $n \geq 0$.

Fie pentru aceasta E o curbă integră pe X astfel încît $(K \cdot E) = 0$. Deoarece $(K^2) > 0$, teorema lui Hodge de index (2.4) implică $(E^2) < 0$, deoarece divizorul E nu poate fi numeric echivalent cu zero. Cum $0 \leq p_a(E) = 1/2(E^2) + 1/2(K \cdot E) + 1 = 1/2(E^2) + 1 \leq 0$, rezultă că $p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -2$. Reciproc, orice curbă E cu $p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -2$ (E integră), are proprietatea $(K \cdot E) = 0$.

Dacă pe suprafața X nu există nici-o asemenea curbă, atunci K este un divizor amplu în baza criteriului Nakai-Moishezon, și teorema este clară în acest caz (mai puțin faptul că inelul canonic $R(X)$ este k -algebră finit generată), deoarece se aplică (5.5).

Prin urmare rămîne să analizăm cazul cînd asemenea curbe pe X există. Vom arăta că $\{E \subset X \mid E \text{ curbă integră, } p_a(E) = 0 \text{ și } (E^2) = -2\}$ este o mulțime finită. Acest fapt rezultă din teorema Néron-Severi de finitudine a numărului bază $\rho = \text{rang } NS(X)$ și următoarea :

(9.1.2) *Afirmație.* Fie E_1, \dots, E_n n curbe integrale pe X (distincte două cîte două) astfel încît $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$ (deci astfel încît $(K \cdot E_i) = 0$) pentru orice $i = 1, \dots, n$. Atunci clasele lui E_1, \dots, E_n în $NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sînt elemente linear independente peste \mathbb{Q} , iar matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|_{i,j}$ este definită negativ.

Demonstrația afirmației (9.1.2). Observăm mai întîi că de îndată ce știm că E_1, \dots, E_n definesc în \mathbb{Q} -spațiul vectorial $V = NS(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ elemente linear independente, atunci faptul că matricea de intersecție (pe care o vom nota prin M_n) este definită negativ este o consecință a faptului că indicele de intersecție (\cdot) este o formă bilineară nedegenerată pe V de semnătură $(1, \rho - 1)$ (vezi (2.4)).

Demonstrăm acum afirmația prin inducție după n , cazul $n = 1$ fiind evident. Fie deci E_1, \dots, E_n n curbe (distincte două cîte două) cu proprietatea că $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$ și care definesc elemente linear independente în V ; fie E_{n+1} o curbă (integră ca și E_1, \dots, E_n) distinctă de fiecare E_i , ($i = 1, \dots, n$) și cu proprietatea $(K \cdot E_{n+1}) = 0$. Presupunem prin absurd că ar exista o rela-

ție de forma :

$$(9.1.3) \quad E_{n+1} \cong a_1 E_1 + \dots + a_n E_n, \quad a_i \in \mathbb{Q}.$$

Notînd $Z = - \sum_{i=1}^n a_i E_i$, fie $Z = Z_1 - Z_2$, cu $Z_1 \geq 0$, $Z_2 \geq 0$ și Z_1 și Z_2 fără componente comune (mai exact, $Z_1 =$ sumă acelor $a_i E_i$ pentru care $a_i \leq 0$) și $Z_2 =$ sumă acelor $a_i E_i$ pentru care $a_i \geq 0$). Deoarece $(Z_1 \cdot Z_2) \geq 0$ și $(Z_2^2) \leq 0$ (într-adevăr, avem $(K \cdot Z_2) = 0$ și deci după (2.4) $(Z_2^2) \leq 0$), rezultă $(Z \cdot Z_2) = (Z_1 \cdot Z_2) - (Z_2^2) \geq 0$. Cum $(Z \cdot E_i) = -(E_{n+1} \cdot E_i) \leq 0$ dacă $i \leq n$, rezultă $(Z \cdot Z_2) \leq 0$, de unde $(Z \cdot Z_2) = 0$ și deci $(Z_2^2) = 0$. Cum Z_2 este o combinație lineară de elemente linear independente (făcînd parte din E_1, \dots, E_n), deducem, conform observației inițiale, că $Z_2 = 0$. Cu alte cuvinte am demonstrat că $a_i \leq 0$ pentru orice $i = 1, \dots, n$. Însă atunci relația (9.1.3) se mai poate scrie: $E_{n+1} + (-a_1)E_1 + \dots + (-a_n)E_n \cong 0$, $(-a_i) \geq 0$ pentru orice i , lucru absurd pe o suprafață proiectivă. Afirmația (9.1.2) este deci dovedită.

Revenind la demonstrația teoremei (9.1), fie deci E_1, \dots, E_n toate curbele integrale (distincte două câte două) de pe X care au proprietatea $(K \cdot E_i) = 0$ pentru orice i . Cum am văzut că atunci $p_a(E_i) = 0$, $(E_i^2) = -2$ pentru orice i , și matricea de intersecție $\|(E_i \cdot E_j)\|$ este definită negativ, din teorema (3.15) rezultă că există un morfism $\varphi: X \rightarrow Y$ care contractă subconfigurațiile conexe din E_1, \dots, E_n la puncte normale, care este izomorfism între $X - \bigcup_{i=1}^n E_i$ și $Y - \text{Sing}(Y)$, și pentru care fasciculul dualizant ω_Y este inversibil și $\varphi^*(\omega_Y) = \omega_X$.

A verifica faptul că sistemul linear complet $|\omega_X^n|$ nu are puncte bază pentru $n \geq 0$ revine la a verifica faptul că sistemul linear complet $|\omega_Y^n|$ nu are puncte bază pentru $n \geq 0$. Însă $(\omega_Y \cdot \omega_Y) = (\omega_X \cdot \omega_X) = (K^2) > 0$, iar dacă F este o curbă integră arbitrară pe Y și E este transformata sa proprie prin φ , atunci $(\omega_Y \cdot F) = (f^*(\omega_Y) \cdot E) = (\omega_X \cdot E) = (K \cdot E) > 0$, deoarece E nu se află printre curbele E_i cu proprietatea $(K \cdot E_i) = 0$. Aplicînd criteriul Nakai-Moishezon pe Y , rezultă că ω_Y este un O_Y -modul inversibil amplu. Deci pentru n suficient de mare sistemul linear complet $|\omega_Y^n|$ definește o scufundare a lui Y într-un spațiu proiectiv P . Deci pentru n suficient de mare sistemul linear complet $|\omega_X^n|$ nu are puncte bază ($\omega_X^n \cong \varphi^*(\omega_Y^n)$) și morfismul φ_n se identifică cu φ .

În fine, deoarece $\omega_Y^n \cong \varphi_* \varphi^*(\omega_Y^n) \cong \varphi_*(\omega_X^n)$ pentru orice $n \geq 1$, inelul canonic $R(X)$ se identifică cu $\Gamma_*(\omega_Y)$ al cărui grad

de transcendență peste k este, după (5.5), egal cu 3, deci $c(X) = 2$. (Observăm că ipoteza din (5.5), că X este varietate nesingulară, nu este importantă; lema (5.5) merge pentru orice varietate ireductibilă).

Tot din lema (5.5) deducem că pentru n suficient de mare sistemul linear complet $|\omega_Y^n|$ nu are puncte bază și că algebra graduată (peste k) $\Gamma_*(\omega_Y^n) = (R(X))^{(n)}$ este finit generată (în general dacă S este o k -algebră graduată și $n > 0$ un întreg strict pozitiv, atunci, punindu-ne de acord cu EGA II, vom nota prin $S^{(n)}$ k -algebra graduată astfel încît $(S^{(n)})_s = S_{ns}$ pentru orice s întreg). Acum demonstrația teoremei (9.1) se încheie folosind următoarea propoziție a lui Zariski :

(9.2) PROPOZIȚIE. (Zariski). Fie X o k -schemă algebrică proprie și $L = \mathcal{O}_X$ -modul inversibil. Dacă $S = \Gamma_*(L)$ și există un $n \geq 1$ astfel încît sistemul linear complet $|L^n|$ să nu admită puncte bază și $S^{(n)} = \Gamma_*(L^n)$ să fie o k -algebră finit generată, atunci S este o k -algebră finit generată.

Vom demonstra această propoziție la sfîrșitul acestui paragraf (chiar într-o versiune mult mai generală, care ne va permite deducerea unui rezultat important al lui Zariski).

(9.3) Recapitulăm acum rezultatele privind clasificarea suprafețelor demonstrate pînă în momentul de față. Fie X o suprafață minimală. Atunci :

- i) X aparține clasei a) $\Rightarrow c(X) = -1 \Rightarrow |4K| = \emptyset$ și $|6K| = \emptyset$
- ii) X aparține clasei b) $\Rightarrow c(X) = 0 \Rightarrow 4K \sim 0$ sau $6K \sim 0$;
- iii) X aparține clasei c) $\Rightarrow c(X) = 1 \Rightarrow |4K|$ sau $|6K|$ este reprezentat de cîte un divizor strict pozitiv, și $(K^2) = 0$.
- iv) X aparține clasei d) $\Rightarrow c(X) = 2$ și în acest caz $|2K| \neq \emptyset$.

Deoarece clasele a), b), c) și d) sînt disjuncte două cîte două și epuizează toate modelele minimale de suprafețe (proiective și nesingulare) și analog pentru suprafețele minimale cu dimensiunea canonică $-1, 0, 1, 2$, rezultă că am demonstrat :

(9.4) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală. Atunci :

- i) Există pe X o curbă integră C astfel încît $(K \cdot C) < 0 \Leftrightarrow c(X) = -1 \Leftrightarrow p_4 = 0$ și $p_6 = 0 \Leftrightarrow p_{12} = 0$.
- ii) Pentru orice curbă C de pe X avem $(K \cdot C) = 0 \Leftrightarrow c(X) = 0 \Leftrightarrow 4K \sim 0$ sau $6K \sim 0 \Leftrightarrow 12K \sim 0$.
- iii) $(K^2) = 0$, $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă C integră pe X și există o curbă C' pe X astfel încît $(K \cdot C') > 0 \Leftrightarrow c(X) = 1 \Leftrightarrow (K^2) = 0$ și $|4K|$ sau $|6K|$ este reprezentat de un divizor strict pozitiv $\Leftrightarrow |12K|$ este reprezentat de un divizor strict pozitiv și $(K^2) = 0$.
- iv) $(K^2) > 0$ și $(K \cdot C) \geq 0$ pentru orice curbă integră C pe $X \Leftrightarrow c(X) = 2$. În acest caz $|2K| \neq \emptyset$.

(9.5) DEFINIȚIE. O suprafață X se numește de *tip general* dacă $c(X) = 2$ și de *tip special* dacă $c(X) \leq 1$. Dacă X este suprafață minimală de tip general, atunci $X_n = \varphi_n(X)$ (în notațiile teoremei (9.1)) se numește modelul canonic de ordin n al lui X , sau n -modelul canonic al lui X .

Suprafețele de tip general sînt analogul în dimensiune 2 al curbilor proiective și nesingulare de gen $g \geq 2$. Pentru o suprafață de tip general (care este și minimală) n -modelul său canonic X_n este pentru n suficient de mare o suprafață proiectivă, normală, avînd drept singularități cel mult puncte raționale duble, morfismul φ_n este birațional (φ_n este într-adevăr morfism deoarece pentru $n \gg 0$ sistemul linear $|nK|$ nu are puncte bază), iar perechea (X_n, φ_n) este independentă de n . Dacă X_n este nesingulară pentru $n \gg 0$, atunci φ_n este chiar un izomorfism și deci ω_X este un O_X -modul amplu. Acest ultim fapt se întîmplă dacă și numai dacă nu există pe X nici-o curbă integră E cu $p_a(E) = 0$ și $(E^2) = -2$.

(9.6) *Exemple de suprafețe de tip general.* Un exemplu de suprafață de tip general a fost deja întîlnit la (5.8) ii) anume produsul a două curbe proiective și nesingulare C_1 și C_2 de genuri g_1 și $g_2 > 2$.

(9.6.1) Fie X o suprafață nesingulară și proiectivă scufundată în P^n astfel încît X este intersecție completă în P^n . Aceasta înseamnă că idealul omogen $I(X)$ al lui X în inelul polinoamelor $k[T_0, \dots, T_n]$ (inelul de coordonate omogene al lui P^n) este generat de $n - 2$ elemente omogene f_1, \dots, f_{n-2} de grade $d_1, \dots, d_{n-2} > 0$ respectiv. Exprîmîndu-ne geometric, vom spune că X este intersecția (completă) a hipersuprafețelor H_1, \dots, H_{n-2} de ecuații $f_1 = 0, \dots, f_{n-2} = 0$ respectiv. Un rezultat general (vezi Serre [1], § 78) arată că X este proiectiv normală în P^n (adică omomorfismul canonic Serre (vezi demonstrația lui (5.5), Serre [1], sau EGA II este un izomorfism) și $H^1(X, O_X(s)) = 0$ pentru orice $s \in \mathbb{Z}$, iar $\omega_X = O_X \left(\sum_{i=1}^{n-2} d_i - n - 1 \right)$, unde prin $O_X(s)$ am notat $O_{P^n}(s) \otimes O_X$.

Deci dacă $\sum_{i=1}^{n-2} d_i > n + 1$, atunci ω_X este un O_X -modul inversibil amplu. În particular, dacă E este o curbă integră pe X , atunci $(\omega_X \cdot E) > 0$, și prin urmare E nu poate fi curbă excepțională de prima specie (dacă E ar fi excepțională de prima specie am avea $(\omega_X \cdot E) = -1$). În concluzie, dacă $\sum_{i=1}^{n-2} d_i > n + 1$, atunci X este o suprafață minimală de tip general cu iregularitatea $q = 0$. În particular, dacă X este o suprafață nesingulară de grad d în P^3 și $d \geq 5$ atunci X este o suprafață minimală de tip general cu $q = 0$.

(9.6.2) Fie X' suprafața din P^3 dată de ecuația

$$T_0^5 + T_1^5 + T_2^5 + T_3^5 = 0.$$

Dacă caracteristica lui k este diferită de 5, atunci, după cele spuse mai sus, X' este o suprafață nesingulară, minimală de tip general cu $q(X') = 0$. Fie ξ o rădăcină primitivă de ordin 5 a unității, și $u: X' \rightarrow X'$ automorfismul lui X' definit prin $u(t_0, t_1, t_2, t_3) = (t_0, \xi t_1, \xi^2 t_2, \xi^3 t_3)$. Atunci u este un automorfism de ordin 5 ($u^5 = \text{id}$). Se vede imediat că u nu are niciun punct fix pe X' . Dacă G este subgrupul de ordin 5 al grupului $\text{Aut}(X')$ al tuturor automorfismelor algebrice ale lui X' , atunci suprafața factor $X = X'/G$ este nesingulară (deoarece u nu are puncte fixe pe X') și proiectivă. Fie $f: X' \rightarrow X$ morfismul canonic. Atunci omomorfismul canonic de O_X -module $O_X \xrightarrow{\alpha} f_*(O_{X'})$ splitază, adică există un omomorfism de O_X -module $\beta: f_*(O_{X'}) \rightarrow O_X$ astfel încât $\beta \circ \alpha = \text{id}$. Într-adevăr deoarece f este finit putem defini omomorfismul urmă $T: f_*(O_{X'}) \rightarrow O_X$ și punem $\beta = 1/5 \cdot T$. De aici rezultă că omomorfismul indus de $H^1(O_X) \rightarrow H^1(f_*(O_{X'})) = H^1(O_{X'})$ este injectiv. Cum $H^1(O_{X'}) = 0$ (deoarece X' este intersecție completă), atunci $H^1(O_X) = 0$.

Pe de altă parte, $\omega_X = O_{X'}(1)$ (vezi (9.6.1)) și cum X' este proiectiv normală, rezultă

$$p_g(X') = \dim H^0(X', \omega_{X'}) = \dim H^0(X', O_{X'}(1)) = 4,$$

de unde $\chi(O_{X'}) = 1 - q(X') + p_g(X') = 5$. Acum folosim:

(9.7) PROPOZIȚIE. Dacă $f: X \rightarrow X'$ este un morfism etal de grad n între două suprafețe X' și X , atunci $\chi(O_X) = n\chi(O_{X'})$.

Acceptînd pentru moment această propoziție, rezultă atunci că $\chi(O_X) = 1$, adică $1 - q(X) + p_g(X) = 1$. Cum am văzut că $q(X) = 0$, deducem $p_g(X) = 0$. Deoarece f este morfism etal avem $f^*(\omega_X) \cong \omega_{X'}$ și cum $\omega_{X'}$ este amplu pe X' rezultă ω_X amplu pe X (vezi EGA III sau Hartshorne [3], pag. 25). În particular, X este suprafață minimală.

Deci X este un exemplu de suprafață de tip general cu $q = p_g = 0$. Suprafața X este cunoscută sub denumirea de suprafața lui Godeaux.

Demonstrația propoziției (9.7). Enunțul propoziției (9.7) este adevărat și pentru varietăți proiective și nesingulare X' și X de dimensiune arbitrară și este o consecință a teoremei lui Riemann-Roch-Grothendieck (vezi Borel-Serre [1]). Vom da argumentul direct în cazul suprafețelor, bazîndu-ne pe formula lui Noether.

Deoarece f este morfism etal avem $f^*(\Omega_{X/k}^1) = \Omega_{X'/k}^1$ (f este morfism neted de dimensiune relativă 0, și afirmația rezultă din șirul exact canonic $0 \rightarrow f^*(\Omega_{X/k}^1) \rightarrow \Omega_{X'/k}^1 \rightarrow \Omega_{X'/X}^1 = 0$, vezi Altman-Kleiman [1], pag. 147, sau Hartshorne [1], pag. 269). Rezultă $f^*(T_X) = T_{X'}$, unde T_X (resp. $T_{X'}$) este fibratul tangent al lui X (resp. al lui X'), și deci :

$$c_2(X') = c_2(T_{X'}) = c_2(f^*(T_X)) = f^*c_2(T_X) = f^*c_2(X)$$

unde sublinierea înseamnă că ne găsim în inelul lui Chow $A(X')$ sau $A(X)$. Trecînd la grade în relația obținută avem :

$$c_2(X') = (\deg(f)) \cdot c_2(X) = nc_2(X).$$

Pe de altă parte, deoarece $\omega_{X'} = f^*(\omega_X)$, avem după (1.18) :

$$(\omega_{X'} \cdot \omega_{X'}) = n \cdot (\omega_X \cdot \omega_X).$$

Ținînd acum cont de formula lui Noether, obținem :

$$\begin{aligned} \chi(O_{X'}) &= 1/12 \cdot [(\omega_{X'} \cdot \omega_{X'}) + c_2(X')] = 1/12 [n(\omega_X \cdot \omega_X) + \\ &+ nc_2(X)] = n\chi(O_X) \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Ținînd cont de formula explicită a clasei canonice a unei suprafețe eliptice sau cvasieliptice (adică o suprafață X pentru care există o fibrare eliptică sau cvasieliptică), de (7.13) și de propoziția (9.2), punctele ii) și iii) ale teoremei (9.4) pot fi reformulate mai precis.

(9.8) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală. Următoarele afirmații sînt echivalente :

- i) $c(X) = 0$.
- ii) X aparține clasei b).
- iii) $12K \sim 0$

În oricare din aceste situații inelul canonic $R(X)$ este o k -algebră finit generată (și de grad de transcendență 1).

(9.9) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală. Următoarele afirmații sînt echivalente :

- i) $c(X) = 1$.
- ii) X aparține clasei c).
- iii) Sistemul linear complet $|12K|$ conține un divizor strict pozitiv și $(K^2) = 0$.

iv) Există o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \rightarrow B$ cu $\lambda(f) > 0$.

v) Există o fibrare eliptică sau cvasieliptică $f: X \rightarrow B$ și un $n > 0$ astfel încât $nK \sim f^*(D)$, cu D divisor strict pozitiv pe curba B .

În oricare din aceste situații sistemul linear complet $|nK|$ nu are puncte bază pentru un $n > 0$, iar inelul canonic $R(X)$ este o k -algebră finit generată (de grad de transcendență 2).

(9.10) COROLAR. (Zariski-Mumford). Dacă X este o suprafață proiectivă și nesingulară arbitrară, atunci inelul canonic $R(X)$ este o k -algebră finit generată.

Demonstrație. După (6.3) există un morfism birațional $f: X \rightarrow Y$ cu Y model minimal, iar după (5.7), f induce un izomorfism $R(X) \cong R(Y)$. Rezultă că, fără a restringe generalitatea, putem presupune că X este suprafață minimală. Dacă $c(X) = -1$, atunci $R(X) = k$. Dacă $c(X) = 0$, $R(X)$ este finit generată peste k conform teoremei (9.8), dacă $c(X) = 1$, conform teoremei (9.9), iar dacă $c(X) = 2$ — conform teoremei (9.1). Q.E.D.

Rămîne acum să demonstrăm propoziția (9.2). După cum am mai spus, vom demonstra de fapt un rezultat mult mai general al lui Zariski. Avem însă nevoie de cîteva pregătiri.

(9.11). Fie $m \geq 1$ un număr natural fixat și fie \mathbb{Z}^m grupul aditiv $\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ (de m ori). Printr-un inel m -graduat S vom înțelege un inel comutativ S înzestrat cu o descompunere $S = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^m} S_a$, cu S_a grup abelian pentru orice $a \in \mathbb{Z}^m$, astfel încît pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}^m$, aplicația de înmulțire $S \times S \rightarrow S$ se factorizează prin $S_a \times S_b \rightarrow S_{a+b}$. În particular, S_0 este un subinel al lui S și S_a este un S_0 -modul pentru fiecare $a \in \mathbb{Z}^m$. Dacă $m = 1$, obținem definiția uzuală de inel graduat.

Pentru fiecare $1 \leq i \leq m$ vom nota prin e_i elementul $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ în care 1 apare numai pe locul i . Date fiind inelul m -graduat S și S -modulul m -graduat (definiția fiind acum clară), vom spune că E este i -finit dacă există un număr natural n astfel încît aplicațiile $S_{e_i} \times E_a \rightarrow E_{e_i+a}$ sînt surjective ori de cîte ori $a_i \geq n$, unde $a = (a_1, \dots, a_m)$. Dacă E este i -finit pentru orice $i = 1, \dots, m$, vom spune că E este polifinit.

(9.12) LEMĂ. Fie S un inel m -graduat, S' — S_0 -subalgebra lui S generată de toate elementele lui S de grad total 1, și E un S -modul m -graduat. Dacă E este finit generat ca S' -modul, atunci E este polifinit. Reciproc, dacă presupunem că fiecare E_a este finit generat ca S_0 -modul și $E_a = 0$ pentru orice $a \ll 0$ (în ordinea parțială naturală a lui \mathbb{Z}^m), atunci E polifinit implică E finit generat ca S' -modul.

Demonstrație. Vom folosi următoarele afirmații imediate :

- a) E este i -finit $\Rightarrow E(a)$ este i -finit pentru orice $a \in \mathbb{Z}^m$, unde $E(a)$ este S -modulul m -graduat astfel încît $E(a)_b = E_{a+b}$.
- b) Dacă E și E' sînt i -finite $\Rightarrow E \oplus E'$ este i -finit.
- c) Orice modul cît al unui S -modul m -graduat i -finit este i -finit.

Este clar că S' este polifinit peste el însuși, și chiar mai mult, S' -modulul E m -graduat și finit generat este polifinit ca S' -modul. Într-adevăr, deoarece E este S' -modul finit generat, E este izomorf cu un cît al unei sume directe de S' -module de forma $S'(a)$ și se aplică a), b) și c) și faptul că S' este polifinit peste el însuși.

Reciproc, dacă E este S -polifinit, atunci există un $b \in \mathbb{Z}^m$ astfel încît aplicațiile $S_{e_i} \times E_a \rightarrow E_{e_i+a}$ sînt surjective dacă $a_i \geq b_i$, ($i = 1, \dots, m$). Atunci rezultă imediat că $\bigoplus_{a \leq b} E_a$ generează pe E ca S' -modul. Din ipoteze rezultă că $\bigoplus_{a \leq b} E_a$ este finit generat ca S_0 -modul, deci E este S' -modul finit generat. Q.E.D.

(9.13) PROPOZIȚIE. Fie k un corp, V_1, \dots, V_m m k -spații vectoriale de dimensiune finită și $Y = P(V_1) \times \dots \times P(V_m)$, unde $P(V_i)$ este spațiul proiectiv asociat k -spațiului vectorial V_i . Dacă F este un O_Y -modul coerent și $a \in \mathbb{Z}^m$, fie $F(a) = F \otimes p_1^*(O(a_1)) \otimes \dots \otimes p_m^*(O(a_m))$, cu p_i proiecția canonică a lui Y pe $P(V_i)$. Atunci :

i) Aplicația naturală Serre

$$S = S(V_1) \otimes_k \dots \otimes_k S(V_m) \rightarrow \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}^m} H^0(Y, O_Y(a))$$

este un izomorfism de inele m -graduate, unde $S(V_i)$ este k -algebra simetrică a lui V_i .

ii) $H^q(Y, O_Y(a)) = 0$ pentru orice $q \geq 1$ și $a \geq 0$.

iii) $\bigoplus_{a \geq 0} H^q(Y, F(a))$ este un S -modul finit generat.

iv) Dacă $q \geq 1$, $H^q(Y, F(a)) = 0$ pentru orice $a \geq 0$.

Demonstrație. Cazul $m = 1$ coincide cu o teoremă binecunoscută a lui Serre (vezi EGA III sau FAC).

Presupunem mai întîi că am demonstrat i), ii) și iii) pentru $F = O_Y(b)$ în general (adică m arbitrar). Atunci iii) pentru F și iv) rezultă în modul următor. Deoarece Y se scufundă prin imersia lui Segre într-un spațiu proiectiv via O_Y -modulul inversibil foarte amplu $L = O_Y(1, 1, \dots, 1)$, orice O_Y -modul coerent este un cît al unei sume directe finite F' de exemplare de forma L^j cu j întreg.

Cum iii) și iv) sînt adevărate pentru F' și de asemenea pentru orice F dar cu condiția $q > \dim(Y)$, rezultă din șirul exact

$$0 \rightarrow G \rightarrow F' \rightarrow F \rightarrow 0$$

șirul exact de coomologie

$$H^q(Y, F'(a)) \rightarrow H^q(Y, F(a)) \rightarrow H^{q+1}(Y, G(a)).$$

Atunci iii) și iv) rezultă în cazul general folosind inducție descrescătoare după q și faptul că iii) și iv) sînt adevărate pentru F' .

Rămîne deci de probat i), ii) și iii) în cazul $F = O_Y(b)$. Presupunînd acestea adevărate pentru m și $Y = P(V_1) \times \dots \times P(V_m)$ fie V un k -spațiu vectorial finit dimensional și fie diagrama carteziană :

$$\begin{array}{ccc} Y \times P(V) & \xrightarrow{g} & P(V) = P \\ f \downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{p} & \text{Spec}(k) \end{array}$$

Dacă $a \in \mathbb{Z}^m$ și $n \in \mathbb{Z}$ atunci $O_{Y \times P}(a, n) = f^*O_Y(a) \otimes g^*O_P(n)$. Folosind formula proiecției, aplicația naturală $O_Y(a) \otimes R^q f_*(g^*O_P(n)) \rightarrow R^q f_*(O_{Y \times P}(a, n))$ este un izomorfism. De asemenea, cum p este plat, aplicația naturală $p^*R^q h_*O_P(n) \rightarrow R^q f_*(g^*O_P(n))$ este un izomorfism. Din aceste două izomorfisme obținem că $R^q f_*O_{Y \times P}(a, n) = O_Y(a) \otimes H^q(P, O_P)$ de unde

$$(*) \quad H^p(Y, O_Y(a)) \otimes_k H^q(P, O_P(n)) = H^p(Y, R^q f_*O_{Y \times P}(a, n)).$$

Din ipoteza de inducție aplicația naturală

$$\begin{aligned} S_a \otimes S^n(V) &\rightarrow H^0(Y, O_Y(a)) \otimes_k H^0(P, O_P(n)) \cong \\ &\cong H^0(Y \times P, O_{Y \times P}(a, n)) \end{aligned}$$

este un izomorfism, deci i) este dovedit și pentru $Y \times P(V)$.

Folosind ipoteza de inducție pentru ii) și izomorfismul (*), vedem că dacă $(a, n) \geq 0$, $H^p(Y, R^q f_*O_{Y \times P}(a, n)) = 0$ dacă $p > 0$ sau $q > 0$.

Șirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(Y, R^q f_* O_{Y \times P}(a, n)) \Rightarrow H^{p+q}(Y \times P, O_{Y \times P}(a, n))$$

degenerează și deci

$$H^p(Y, f_* O_{Y \times P}(a, n)) \cong H^p(Y \times P, O_{Y \times P}(a, n)).$$

Însă cum pentru $p > 0$

$$H^p(Y, f_* O_{Y \times P}(a, n)) \cong H^p(Y, O_Y(a)) \otimes_k H^0(P, O_P(n)),$$

deducem că ii) este valabil și pentru $Y \times P$ (dacă presupunem ii) valabil pentru Y).

În fine, din ipoteza de inducție $\bigoplus_{a \geq 0} H^p(Y, O_Y(b + a))$ este un S -modul finit generat, iar $\bigoplus_{n \geq 0} H^q(P, O_P(n' + n))$ este un $S(V)$ -modul finit generat pentru orice $b \in \mathbb{Z}^m, n' \in \mathbb{Z}$. Deci ținând cont de (*), produsul lor tensorial $\bigoplus_{(a,n) \geq 0} H^p(Y, R^q f_* O_{Y \times P}(b + a, n' + n))$ este un $S \otimes_k S(V)$ -modul finit generat. Deci și limita șirului spectral considerat este finit generată și propoziția (9.13) este complet demonstrată. Q.E.D.

(9.14) TEOREMĂ. (Zariski). Fie F un O_X -modul coerent pe schema X proprie peste k , și fie L_1, \dots, L_m ($m \geq 1$) m O_X -module inversibile pe X . Fie T un subinel m -graduat al inelului m -graduat (cu înmulțirea indusă de produsul tensorial) $\bigoplus_{a \geq 0} H^0(X, L_1^{a_1} \otimes \dots \otimes L_m^{a_m})$ și E un T -submodul graduat al lui $\bigoplus_{a \geq 0} H^n(X, F \otimes L_1^{a_1} \otimes \dots \otimes L_m^{a_m})$ ($n \geq 0$). Dacă sistemele lineare T_{e_i} nu au puncte bază pentru orice $i = 1, \dots, m$, atunci E este polifinit.

Demonstrație. Fie $V_i = T_{e_i} \subset H^0(X, L_i)$. Deoarece V_i nu au puncte bază, există un morfism $f_i: X \rightarrow P(V_i)$ astfel încât $f_i^*(O(1)) \cong L_i$. Atunci dacă $f: X \rightarrow Y = P(V_1) \times \dots \times P(V_m)$ este morfismul determinat de f_1, \dots, f_m , avem $f^*(O(a)) \cong L_1^{a_1} \otimes \dots \otimes L_m^{a_m}$ pentru orice $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$. Cum f este propriu, fasciculele $R^q f_*(F)$ sînt coerente pe Y , și deci după propoziția (9.13) S -modulul m -graduat

$$E_2^{pq} = \bigoplus_{a \geq 0} H^p(Y, R^q f_*(F(a)))$$

este finit generat, deci și limita $\bigoplus_{a \geq 0} H^n(X, F(a))$ a șirului spectral E_2^{pq} este de asemenea un S -modul finit generat. Cum S este noethe-

rian, S -submodulul E este tot finit generat. Deoarece $T_{e_i} = S_{e_i}$, din lema (9.12) rezultă că E este polifinit ca T -modul. Q.E.D.

(9.15) *Demonstrația propoziției (9.2).* În notațiile propoziției (9.2) fie $L_1 = L^n$, $F = L^i$, $0 \leq i < n$, $T = \bigoplus_{a \geq 0} H^0(X, L_1^a) = \Gamma_*(L_1) = \Gamma_*(L^n) = S^{(n)}$. Avem $T_1 = H^0(X, L^n)$ și prin ipoteză T_1 nu are puncte bază. Fie $E = \bigoplus_{a \geq 0} H^0(X, F \otimes L_1^a) = \bigoplus_{a \geq 0} H^0(X, L^{n+i+a})$. Din teorema (9.14) rezultă că E este un T -modul polifinit (= finit deoarece $m = 1$). Altfel spus, pentru $\sigma \gg 0$ aplicația naturală

$$H^0(X, L^n) \otimes H^0(X, L^{n+i}) \rightarrow H^0(X, L^{(n+1)n+i})$$

este surjectivă pentru orice $i = 0, 1, \dots, n-1$. Deoarece $S^{(n)}$ este o k -algebră finit generată rezultă că și S este o k -algebră finit generată, deoarece $S_m = H^0(X, L^m)$ sînt k -spații vectoriale de dimensiune finită. Q.E.D.

(9.16) *Remarcă.* Observăm că teorema (9.14) a intervenit în demonstrația propoziției (9.2) numai în cazul particular $m = 1$. În acest caz teorema (9.14) are o demonstrație mult mai scurtă, cu toate că utilizează aceeași idee. Demonstrația teoremei (9.14) prezentată aici aparține lui A. Ogus [1]. Demonstrația originală a lui Zariski este complicată și nu face apel la teoria fasciculelor (vezi Zariski [1]). Ca să ilustrăm importanța considerării mai multor sisteme lineare simultan (adică $m > 1$), vom deduce următorul rezultat:

(9.17) *TEOREMĂ.* (Zariski [1]). Fie X o varietate proiectivă și nesingulară de dimensiune ≥ 2 și $|D|$ un sistem linear complet pe X cu un număr finit de puncte bază. Atunci există un $n > 0$ astfel încît sistemul linear complet $|nD|$ să nu aibă puncte bază. (Mai exact, acest lucru se întîmplă dacă n este suficient de mare.)

Demonstrație. Fie H o secțiune hiperplană generică (în particular H ocolește punctele bază ale lui $|D|$). Fie $T = \text{Im}(\sigma) = \bigoplus_{(i,j) \geq 0} \text{Im}(\sigma_{ij})$ subinelul lui $\bigoplus_{(i,j) \geq 0} H^0(H, L_{ij} \otimes O_H)$, unde $L_{ij} = O_X(iH + jD)$, iar componenta de ordin (i, j) a lui σ este omomorfismul canonic de restricție

$$\sigma_{ij} : H^0(X, L_{ij}) \rightarrow H^0(H, L_{ij} \otimes O_H).$$

Deoarece sistemele lineare T_{10} și T_{01} nu au puncte bază pe H , rezultă din (9.14) că T este polifinit, deci există $N > 0$ astfel încît pentru orice $i \geq 0$ și $j \geq N$, omomorfismul canonic

$$T_{i,j-1} \otimes_k T_{01} = (\text{Im}(\sigma_{i,j-1})) \otimes_k (\text{Im}(\sigma_{01}) \xrightarrow{\sigma} \text{Im}(\sigma_{ij}))$$

să fie surjectiv. Considerăm atunci diagrama comutativă :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X, L_{i,j-1}) \otimes_k H^0(X, L_{01}) & \rightarrow & \text{Im}(\sigma_{i,j-1}) \otimes \text{Im}(\sigma_{01}) & \rightarrow & 0 \\ \downarrow v & & \downarrow \tau & & \\ 0 \rightarrow H^0(X, L_{i-1,j}) & \xrightarrow{u} & H^0(X, L_{ij}) & \longrightarrow & \text{Im}(\sigma_{ij}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Surjectivitatea lui τ implică $H^0(X, L_{ij}) = \text{Im}(v) + \text{Im}(u)$, unde u este omomorfismul dat de $s \mapsto s \otimes h$, cu $h \in H^0(X, L_{10})$ astfel încît $\text{div}_X(h) = H$.

Pe de altă parte, pentru un $j \geq N$ fixat și pentru $i \geq 0$, L_{ij} este generat de secțiunile sale globale. Fie x un punct bază al lui D . Atunci este clar că x este punct bază pentru orice divizor de forma $\text{div}_X(s)$ cu $s \in \text{Im}(v)$. Din egalitatea $H^0(X, L_{ij}) = \text{Im}(v) + \text{Im}(u)$ deducem că atunci x nu poate fi punct bază pentru sistemul linear $|L_{i-1,j}| + H$. Cum $x \notin H$, rezultă că x nu este punct bază nici pentru sistemul linear $|L_{i-1,j}|$. Repetînd acest argument, deducem prin inducție descrescătoare după i că x nu este punct bază pentru $|L_{ij}|$ oricare ar fi $i \geq 0$. În particular, x nu este punct bază pentru $|L_{0j}| = |jD|$. Q.E.D.

(9.18) *Referințe bibliografice.* Teorema (9.1) aparține lui Mumford (cf. Mumford [3]) și justifică prezentarea singularităților raționale duble și criteriul de contractibilitate (3.15). Demonstrația prezentată conține mici modificări față de cea din Mumford [3]. Teoremele (9.4), (9.8) și (9.9) sînt consecințe ale rezultatelor din § 8 și a teoremei (9.1). Propoziția (9.2) apare în Zariski [1] împreună cu generalizarea sa din (9.13). Demonstrațiile originale ale lui Zariski sînt complicate, și de aceea am preferat demonstrația co-mologică mai simplă a lui Ogus [1]. Teorema (9.17) aparține tot lui Zariski (loc. cito.). Exemplul (9.6.2) aparține lui Godeaux și este preluat după Beauville [1].

§ 10.

SUPRAFETE CU DIMENSIUNEA
CANONICĂ ZERO (car $\neq 2,3$)

(10.1) Reamintim lista cu suprafețele minimale X cu $(K^2) = 0$ și $p_g \leq 1$ obținută în §8:

$$1. \quad b_2 = 22, \quad b_1 = 0, \quad \chi(O_X) = 2, \quad q = 0, \quad p_g = 1 \text{ și } \Delta = 0.$$

$$2. \quad b_2 = 14, \quad b_1 = 2, \quad \chi(O_X) = 1, \quad q = 1, \quad p_g = 1 \text{ și } \Delta = 0.$$

$$3. \quad b_2 = 10, \quad b_1 = 0, \quad \chi(O_X) = 1 \begin{cases} q = 0, \quad p_g = 0 \text{ și } \Delta = 0, \text{ sau} \\ q = 1, \quad p_g = 1 \text{ și } \Delta = 2. \end{cases}$$

$$4. \quad b_2 = 6, \quad b_1 = 4, \quad \chi(O_X) = 0, \quad q = 2, \quad p_g = 1 \text{ și } \Delta = 0.$$

$$5. \quad b_2 = 2, \quad b_1 = 2, \quad \chi(O_X) = 0 \begin{cases} q = 1, \quad p_g = 0 \text{ și } \Delta = 0, \text{ sau} \\ q = 2, \quad p_g = 1 \text{ și } \Delta = 2. \end{cases}$$

Am observat deja că orice suprafață minimală X cu $c(X) = 0$ are proprietățile $(K^2) = 0$ și $p_g \leq 1$, deci face parte din una din cele cinci categorii enumerate mai sus.

(10.2) **TEOREMĂ.** *Nu există suprafețe minimale X cu proprietățile $c(X) = 0$ și $b_2 = 14$.*

Demonstrație. Din lista de mai sus rezultă că $b_1 = 2 = 2s$, și deci $s = \dim \text{Pic}^0(X) = 1$. În particular, varietatea lui Picard $P(X)$ este netrivială. Aceasta înseamnă că există un O_X -modul inversibil

L algebric echivalent cu zero și neizomorf cu O_X . După teorema Riemann-Roch avem

$\chi(L) = 1/2(L \cdot L \otimes \omega_X^{-1}) + \chi(O_X) = \chi(O_X) = 1$ (din tabelul (10.1)) deci $H^0(L) \neq 0$ sau $H^2(L) \neq 0$. Deoarece $\omega_X \cong 0$ și $p_g = 1$ avem $\omega_X \cong O_X$, deci după teorema de dualitate avem $H^2(L) \cong H^0(L^{-1})$. Rezultă $H^0(L) \neq 0$ sau $H^0(L^{-1}) \neq 0$, și de aici $L \cong O_X$ sau $L^{-1} \cong O_X$ (deoarece $L \cong 0$), ceea ce este absurd. Q.E.D.

Teorema (10.2) și tabelul (10.1) arată că în funcție de al doilea număr Betti $b_2 = b_2(X)$ rămân de analizat pentru posibilități de suprafețe minimale X cu $c(X) = 0$: $b_2 = 22$, $b_2 = 10$, $b_2 = 6$ și $b_2 = 2$.

(10.3) TEOREMĂ. Fie X o suprafață minimală. Următoarele două afirmații sînt echivalente:

a) $c(X) = 0$ și $b_2 = 22$.

b) $K \sim 0$ și $q = 0$.

Suprafețele X care satisfac una din aceste două proprietăți echivalente poartă numele de suprafețe K3 și au în plus următoarele proprietăți:

i) $\text{Pic}^\tau(X) = 0$, altfel spus grupul lui Picard $\text{Pic}(X)$ nu are torsiune, și deci după teorema lui Néron-Severi $\text{Pic}(X)$ este un grup liber de rang finit.

ii) Dacă $f: X' \rightarrow X$ este o acoperire etală a lui X , atunci f este un izomorfism. Altfel spus, X este o suprafață simplu conexă.

Demonstrație. Mai întîi echivalența dintre condițiile a) și b). Implicația a) \Rightarrow b): faptul că $q = 0$ rezultă din tabelul (10.1), iar faptul că $K \sim 0$ rezultă din $\omega_X \cong 0$ și $p_g = 1$ (conform aceluiași tabel). Reciproc, dacă $K \sim 0$, atunci este clar că $c(X) = 0$. Din tabelul (10.1) vedem că singurele posibilități pentru $q = 0$ apar în cazurile 1) (adică $b_2 = 22$) și 3) (în primul subcaz). A doua posibilitate este exclusă deoarece $p_g = 0$, ceea ce contrazice ipoteza $K \sim 0$.

Demonstrăm acum proprietatea i). Deoarece $q = 0$, $H^1(O_X) = 0$. Cum $H^1(O_X)$ se identifică cu spațiul tangent în origine la schema în grupuri $\text{Pic}^\tau(X)$, rezultă că $\text{Pic}^\tau(X)$ este un grup discret (finit). Presupunem că acest grup ar fi netrivial. Fie atunci L un O_X -modul inversibil numeric echivalent cu zero și neizomorf cu O_X . Din teorema Riemann-Roch deducem $\chi(L) = \chi(O_X) = 2$, și deci $H^0(L) \neq 0$ sau $H^2(L) \neq 0$. Cum $\omega_X \cong O_X$, din dualitatea Serre rezultă că $H^0(L) \neq 0$ sau $H^0(L^{-1}) \neq 0$, și cum $L \cong 0$, rezultă $L \cong O_X$ sau $L^{-1} \cong O_X$, ceea ce este absurd. Deci $\text{Pic}^\tau(X) = 0$.

Demonstrăm acum ii). Fie $f: X' \rightarrow X$ o acoperire etală de grad n a lui X . Deoarece $\omega_{X'} = f^*(\omega_X) \cong O_{X'}$, $c(X') = 0$, X' este model minimal și $p_g(X') = 1$. Deci X' se află în tabelul (10.1). Folosind acum propoziția (9.7) deducem $\chi(O_{X'}) = n\chi(O_X) = 2n$. Însă dacă $n > 1$ vedem că în tabelul (10.1) nu există suprafețe X' cu $\chi(O_{X'}) > 2$. Deci $n = 1$, adică f este izomorfism. Q.E.D.

(10.4) *Exemple de suprafețe K3*. Fie X o suprafață nesingulară intersecție completă în P^n ($n \geq 3$) a hipersuprafețelor H_1, \dots, H_{n-2} de grade d_1, \dots, d_{n-2} . O condiție necesară ca X să fie suprafață K3 este ca $\sum_{i=1}^{n-2} d_i = n + 1$. Într-adevăr, dacă X este suprafață K3, atunci

$\omega_X = O_X(\sum_{i=1}^{n-2} d_i - n - 1) \cong O_X$. Reciproc, dacă X este intersecție completă (nesingulară) a hipersuprafețelor H_1, \dots, H_{n-2} de grade d_1, \dots, d_{n-2} astfel încât $\sum_{i=1}^{n-2} d_i = n + 1$, atunci X este suprafață K3 de-

oarece $\omega_X \cong O_X$ și $H^1(O_X) = 0$ (vezi (9.6.1)). În particular, orice suprafață nesingulară de grad 4 din P^3 este suprafață K3. De asemenea, orice intersecție completă (nesingulară) de trei quadrice din P^5 este o suprafață K3.

O altă clasă importantă de suprafețe K3 o constituie suprafețele Kummer asociate varietăților abeliene de dimensiune 2.

(10.5) *Suprafețe Kummer*. Fie k un corp algebric închis de caracteristică diferită de 2 și X o varietate abeliană de dimensiune 2 peste k . Considerăm automorfismul $\tau: X \rightarrow X$ dat de formula $\tau(x) = -x$ (opusul lui x față de operația de grup a lui X). Este clar că $\tau^2 = 1_X$. Obținem deci o acțiune a grupului $G = \{1_X, \tau\}$ pe suprafața X . Observăm că un punct $x \in X$ (închis) este punct fix pentru τ dacă și numai dacă ordinul lui x (în grupul abelian $(X, +)$) este 2. Cum caracteristica lui k este diferită de 2, un rezultat elementar de varietăți abeliene (vezi Mumford [2], §6) arată că există exact 16 asemenea puncte pe X , să zicem $x_1 = 0, x_2, \dots, x_{16}$. Fie $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ eclatata lui X de centru subschema (redușă) închisă și discretă $\{x_1, \dots, x_{16}\}$. Deoarece τ este un automorfism ce lasă punctele x_i pe loc rezultă imediat că există un unic automorfism $\sigma: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ astfel încât $\tau \circ \pi = \pi \circ \sigma$. Atunci $\sigma^2 = 1$ și deci putem considera varietatea cît $Y = \tilde{X}/\sigma$ de dimensiune 2. Y poartă numele de suprafață Kummer asociată suprafeței abeliene X . Cîteva proprietăți importante ale suprafeței Kummer Y sînt date de:

(10.6) **TEOREMĂ.** În ipotezele și notațiile de la (10.5), Y este o suprafață proiectivă și nesingulară. În plus, Y este o suprafață K3

pe care există 16 curbe integrale E_1, \dots, E_{16} ce nu se intersectează două câte două și cu proprietățile $p_a(E_i) = 0$ și $(E_i^2) = -2$, ($i = 1, \dots, 16$), iar dacă H este o secțiune hiperplană pe Y , atunci clasele lui H, E_1, \dots, E_{16} în $\text{Pic}(Y)$ sînt elemente linear independente.

Demonstrație. Fie $\varphi: \tilde{X} \rightarrow Y$ morfismul (finit de grad 2) canonic. Cum \tilde{X} este suprafață proiectivă și φ surjectiv, rezultă că Y este varietate completă de dimensiune 2. Dacă arătăm că Y este nesingulară, atunci teorema (1.28) implică faptul că Y este suprafață (proiectivă și nesingulară).

Să arătăm deci că Y este nesingulară. Fie $F_i = \pi^{-1}(x_i)$, ($i = 1, \dots, 16$), curbele excepționale de prima specie ale lui \tilde{X} (relativ la morfismul π). Cum φ este morfism etal în afara lui $\bigcup_{i=1}^{16} F_i$, rămîne să vedem că Y este nesingulară în punctele de formă $\varphi(x)$ cu $x \in \bigcup_{i=1}^{16} F_i$. Cum X este varietate abeliană, translația t_{x_i} induce un izomorfism între O_{X, x_i} și $O_{X, x_1} = O_{X, 0}$. Este suficient deci să analizăm punctele lui Y de formă $\varphi(x)$ cu $x \in F_1$. Dacă $T_{X, 0}$ (resp. m_0) este spațiul tangent în 0 la X (resp. idealul maximal al lui $O_{X, 0}$) atunci o afirmație generală despre grupuri algebrice (vezi Borel [1], 3.2) arată că aplicația tangentă $(d\tau)_0: T_{X, 0} \rightarrow T_{X, 0}$ coincide cu aplicația $a \mapsto -a$ a lui $T_{X, 0}$. Prin urmare aplicația sa duală $\tau^*: m_0/m_0^2 \rightarrow m_0/m_0^2$ coincide cu aplicația $b \mapsto -b$ a lui $m_0/m_0^2 = T'_{X, 0}$. Rezultă că dacă (u, v) este un sistem regulat de parametri al lui X în 0 (adică un sistem minimal de generatori ai lui m_0), atunci $(\tau^*(u), \tau^*(v))$ este de asemenea un sistem regulat de parametri al lui X în 0, ce coincide modulo m_0^2 cu $(-u, -v)$. Or, dacă punem $u' = u - \tau^*(u)$ și $v' = v - \tau^*(v)$, avem $u' \equiv 2u \pmod{m_0^2}$ și $v' \equiv 2v \pmod{m_0^2}$. Cum caracteristica lui k este diferită de 2, rezultă că (u', v') este un sistem regulat de parametri al lui X în 0 ce satisface în plus condițiile:

$$(*) \quad \tau^*(u') = -u', \quad \tau^*(v') = -v'.$$

Atunci un sistem regulat de parametri pe \tilde{X} într-un punct $x \in F_1$ este de exemplu $u'' = \pi^*(u')$, $v'' = \pi^*(v')/\pi^*(u')$. Din (*) deducem imediat, ținînd cont de definiția lui σ :

$$\sigma^*(u'') = -u'', \quad \sigma^*(v'') = v''.$$

De aici rezultă că (u'', v'') este un sistem regulat de parametri al lui Y în punctul $\varphi(x)$, și deci Y este nesingulară.

Fie acum $E_i = \varphi(F_i)$ (cu structura redusă), $i = 1, \dots, 16$. Este clar că dacă $i \neq j$, avem $E_i \cap E_j = \emptyset$. Pe de altă parte, cum $u'' = 0$ este o ecuație locală a lui F_1 în punctul x , atunci $u''^2 = 0$ este o ecuație locală a lui E_1 în punctul $\varphi(x)$. Deci E_1 este o curbă nesingulară și $\varphi^{-1}(E_1) = 2F_1$ (în sens schematic). Ținând cont de (1.18) deducem :

$$(\varphi^{-1}(E_1) \cdot \varphi^{-1}(E_1)) = \deg(\varphi) \cdot (F_1^2),$$

de unde rezultă $(E_1^2) = -2$. Cum restricția lui φ la F_1 este un izomorfism între F_1 și E_1 , avem și $p_a(E_1) = 0$. Cu remarcă făcută la începutul demonstrației rezultă că pentru orice $i = 2, \dots, 16$ avem de asemenea $(E_i^2) = -2$ și $p_a(E_i) = 0$.

Fie acum h, e_1, \dots, e_{16} clasele lui H, E_1, \dots, E_{16} în $\text{Num}(Y) = \text{Pic}(Y)/\text{Pic}^\tau(Y)$. Arătăm acum că aceste elemente sînt linear independente. Fie deci $a_0 h + \sum_{i=1}^{16} a_i e_i = 0$, cu a_0, a_1, \dots, a_{16} numere întregi. Deoarece $(e_i \cdot e_j) = (E_i \cdot E_j) = 0$ dacă $i \neq j$, avem

$$a_0^2 (h \cdot h) = \sum_{i=1}^{16} a_i^2 (e_i \cdot e_i) = -2 \sum_{i=1}^{16} a_i^2 \leq 0,$$

și deci $a_0 = 0$ deoarece $(h \cdot h) = (H^2) > 0$. Acum din $\sum_{i=1}^{16} a_i e_i = 0$ deducem pentru orice $j = 1, \dots, 16$:

$$0 = \left(e_j \cdot \sum_{i=1}^{16} a_i e_i \right) = -2a_j,$$

și deci $a_j = 0$. În acest mod am demonstrat că $\rho \geq 17$, și cum $\rho \leq b_2$ (inegalitatea Igusa-Severi), rezultă $b_2 \geq 17$.

Ca să încheiem demonstrația teoremei (10.6) va fi suficient să arătăm că $\omega_Y \cong O_Y$, deoarece atunci $c(Y) = 0$. Într-adevăr, singurele suprafețe minimale (Y este minimală dacă $\omega_Y \cong O_Y$) cu $b_2 \geq 17$ care apar în tabelul (10.1) sînt suprafețele cu $b_2 = 22$, adică Y este suprafață $K3$. Dacă Y este suprafață $K3$, teorema (10.3) arată că $\text{Pic}(Y) = \text{Num}(Y)$.

Ca să arătăm că $\omega_Y \cong O_Y$, fie ω o formă diferențială de grad 2 regulată pe X și nenulă. Deoarece ω este invariantă la translații și are gradul 2, rezultă că $\tau^*(\omega) = \omega$ (anume $\omega = du' \wedge dv'$ abstracție făcînd de un factor constant nenul și se ține cont de relațiile

(*)). Rezultă atunci că $\pi^*(\omega)$ este o formă diferențială nenulă de grad 2 și regulată pe \tilde{X} ce este invariata de automorfismul σ . Deci $\pi^*(\omega)$ este de forma $\pi^*(\omega) = \varphi^*(\omega')$, cu ω' o formă nenulă de grad 2 rațională pe Y . Este clar că divizorul lui ω' este concentrat în $\bigcup_{i=1}^{16} E_i$. Însă dacă $y = \varphi(x) \in E_1$ avem (ținând cont de definiții și de notațiile de mai înainte):

$$\begin{aligned}\pi^*(\omega) &= d(\pi^*(u')) \wedge d(\pi^*(v')) = du'' \wedge d(u'' \cdot v'') = \\ &= u'' \cdot du'' \wedge dv'' = 1/2 d(u''^2) \wedge dv''.\end{aligned}$$

Prin urmare ω' este o formă regulată pe Y cu $\text{div}_Y(\omega') = 0$, ceea ce arată că $\omega_Y \cong O_Y$. Q.E.D.

(10.7) *Observații.* a) Dacă Y este suprafața Kummer asociată suprafeței abeliene X , atunci $H^0(Y, \Omega_Y) = 0$, unde $\Omega_Y = \Omega_{Y/k}^1$.

Pentru a justifica afirmația de mai sus vom folosi următorul fapt elementar: dacă $f: X' \rightarrow X$ este o aplicație birațională de suprafețe, atunci f induce un izomorfism $f^*: H^0(X, \Omega_X) \rightarrow H^0(X', \Omega_{X'})$.

Acceptînd pentru moment acest fapt, presupunem prin absurd că ar exista o 1-formă nenulă $\omega' \in H^0(Y, \Omega_Y)$. Atunci $\varphi^*(\omega)$ este o 1-formă din $H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}})$ invariantă pentru σ , și cum π induce un izomorfism $\pi^*: H^0(X, \Omega_X) \xrightarrow{\sim} H^0(\tilde{X}, \Omega_{\tilde{X}})$, rezultă o 1-formă nenulă $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$ invariantă pentru τ . Or, acest lucru este imposibil deoarece $H^0(X, \Omega_X)$ admite ca bază pe du' și dv' ce satisface proprietatea (*) din demonstrația teoremei (10.6).

Rămîne de probat că f induce izomorfismul $f^*: H^0(X, \Omega_X) \rightarrow H^0(X', \Omega_{X'})$. Cum însă f este definită în complementara unui număr finit de puncte și f realizează un izomorfism între un deschis al lui X' și un deschis al lui X , deducem imediat un omomorfism injectiv $f^*: H^0(X, \Omega_X) \rightarrow H^0(X' - \{z_1, \dots, z_m\}, \Omega_{X'})$. Ultimul spațiu vectorial se identifică cu $H^0(X', \Omega_{X'})$, deoarece pentru orice $\omega \in H^0(X, \Omega_X)$ polurile lui $f^*(\omega)$ formează un divizor și deci $f^*(\omega)$ este regulată pe întregul X' . Aplicînd tot ceea ce am spus mai sus aplicației $f^{-1}: X \rightarrow X'$, vedem că f^* este un izomorfism. Q.E.D.

b) Suprafața Kummer Y asociată varietății abeliene X mai poate fi obținută și în felul următor: se consideră mai întîi suprafața cît X/τ care posedă exact 16 singularități corespunzătoare celor 16 puncte fixe ale lui τ . Folosind sistemul regulat de parametri (u', v') al lui X în 0 care satisface condiția (*) din demonstrația teoremei

(10.6), se vede imediat că aceste singularități sînt puncte raționale duble ce se desingularizează fiecare printr-o singură transformare pătratică. Atunci este imediat de văzut că Y se identifică cu suprafața obținută din X/τ eclatînd cele 16 puncte raționale duble.

(10.8) Ținînd cont de tabelul (10.1) și de teorema (10.2), următoarea clasă de suprafețe minimale X cu $c(X) = 0$ de studiat este (ținînd cont de al doilea număr Betti) clasa formată din toate suprafețele minimale X cu $\omega_X \approx 0$ și $b_2 = 10$. Atunci $b_1 = 0$ și $\chi(O_X) = 1$. În acest caz sînt posibile două situații:

a) $p_g = 0$, $q = 0$ și $\Delta = 0$.

b) $p_g = 1$, $q = 1$ și $\Delta = 2$.

În legătură cu situația b) avem următorul rezultat:

(10.9) TEOREMĂ. Dacă caracteristica lui k este diferită de 2 nu pot exista suprafețe minimale X cu $c(X) = 0$, $b_2 = 10$ și $p_g = 1$.

Demonstrație. Presupunem că o asemenea suprafață există. Atunci din tabelul (10.1) avem $q = \dim H^1(O_X) = 1$ și $\Delta = 2$. Din teorema (5.1) rezultă că $\Delta = 2$ implică $p = \text{car}(k) > 0$. Pe de altă parte, deoarece $q > 0$, există un 1-cociclul $a = \{a_{ij}\} \in Z^1(\mathcal{U}, O_X)$ care nu este coomolog cu zero, cu $\mathcal{U} = \{U_i\}$ o acoperire deschisă și finită a lui X cu U_i afini. Urmînd un procedeu bine cunoscut putem să asociem cociclului a un G_a -fibrat $\pi: V \rightarrow X$ (G_a fiind grupul aditiv $(k, +)$) în felul următor: Deasupra deschisului U_i avem $\pi^{-1}(U_i) \cong \mathbb{A}^1 \times U_i$, iar lipirea se face în felul următor: dacă $x \in U_i \cap U_j$, atunci perechile $(z_i, x) \in \mathbb{A}^1 \times U_i$ și $(z_j, x) \in \mathbb{A}^1 \times U_j$ reprezintă același punct în V dacă și numai dacă $z_i = a_{ij} + z_j$.

Deoarece $p_g = 1$ și $\omega_X \approx 0$, există o formă ω de grad 2, regulată pe X și care nu se anulează nicăieri. Atunci familia de forme de grad 3 $\{dz_i \wedge \omega\}_i$ definește o unică formă de grad 3 regulată pe V care nu se anulează nicăieri. Rezultă că V este o varietate nesingulară de dimensiune 3 astfel încît $\omega_V \cong O_V$.

Deoarece $\dim H^1(O_X) = 1$ și $a^p = \{a_{ij}^p\}$ este un 1-cociclul al lui O_X , există un $\lambda \in k$ astfel încît

$$a_{ij}^p = \lambda a_{ij} + b_i - b_j, \text{ cu } b_i \in \Gamma(U_i, O_X).$$

Este imediat de văzut că familia de funcții $\{z_i^p - \lambda z_i - b_i\}_i$, cu $z_i^p - \lambda z_i - b_i \in \Gamma(\mathbb{A}^1 \times U_i, O_V)$, definesc o unică funcție nenulă $f \in \Gamma(V, O_V)$ (deci $f|_{\mathbb{A}^1 \times U_i} = z_i^p - \lambda z_i - b_i$). Fie X' suprafața

din V dată de ecuația $f = 0$. Atunci X' este o suprafață Gorenstein. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci restricția $\text{res} \pi = \pi' : X' \rightarrow X$ a lui π la X' este un morfism etal, și deci X' este neregulară în acest caz. Dacă $\lambda = 0$, atunci X' este dată în $\mathbb{A}^1 \times U_i$ de ecuația $z_i^p - b_i = 0$. Cum $b_i^{1/p} \notin \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ (altfel cocicluul a ar fi coomolog cu zero), rezultă că X este în acest caz o suprafață redusă și conexă. Deci în ambele cazuri avem $\dim H^0(\mathcal{O}_{X'}) = 1$. În plus, deoarece fibratul conormal al lui X' în V este trivial și $\omega_V \cong \mathcal{O}_V$, deducem $\omega_{X'} \cong \mathcal{O}_{X'}$.

Avem $\chi(\mathcal{O}_{X'}) \leq \dim H^0(\mathcal{O}_{X'}) + \dim H^2(\mathcal{O}_{X'}) = \dim H^0(\mathcal{O}_{X'}) + \dim H^0(\mathcal{O}_{X'}) = 2$.

În fine, după cum este imediat de verificat, avem următoarea filtrare globală a lui $\pi'_* \mathcal{O}_{X'}$:

$$0 \subset \mathcal{O}_X \subset [\mathcal{O}_X \oplus z_i \mathcal{O}_X] \subset \dots \subset [\mathcal{O}_X \oplus z_i \mathcal{O}_X \oplus \dots \oplus z_i^{p-1} \mathcal{O}_X] = \pi'_* \mathcal{O}_{X'},$$

cu $(\mathcal{O}_X \oplus z_i \mathcal{O}_X \oplus \dots \oplus z_i^n \mathcal{O}_X) / (\mathcal{O}_X \oplus z_i \mathcal{O}_X \oplus \dots \oplus z_i^{n-1} \mathcal{O}_X) \cong \mathcal{O}_X$ pentru orice $n \leq p-1$. Ținând cont de aditivitatea caracteristicii Euler-Poincaré obținem $\chi(X, \pi'_* \mathcal{O}_{X'}) = p\chi(\mathcal{O}_X)$. Cum π' este un morfism finit $\chi(X, \pi'_* \mathcal{O}_{X'}) = \chi(\mathcal{O}_{X'})$, și ținând cont și de inegalitatea obținută mai sus, avem $p\chi(\mathcal{O}_X) \leq 2$, și deci $p = 2$. Q.E.D.

(10.10) Teorema (10.9) arată că dacă $\text{car}(k) \neq 2$, singurele suprafețe minimale cu $c(X) = 0$ și $b_2 = 10$ care rămân de studiat sînt acelea care aparțin situației a) de mai sus, adică: $c(X) = 0$, $b_2 = 10$, $b_1 = 0$, $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$, $p_g = 0$, $q = 0$ și $\Delta = 0$. Aceste suprafețe poartă numele de *suprafețe Enriques* (sau uneori *suprafețe Enriques clasice*, pentru a le deosebi de suprafețele Enriques neclasice, adică suprafețele minimale X cu $c(X) = 0$, $b_2 = 10$ și $p_g = 1$, care apar efectiv în caracteristică 2, vezi Bombieri-Mumford [2]). Deoarece ne-am propus în acest paragraf să studiem suprafețele minimale X cu $c(X) = 0$ doar în caracteristică diferită de 2 și 3, teorema (10.9) arată că numai suprafețele Enriques clasice rămîn în discuție.

(10.11) PROPOZIȚIE Dacă X este o suprafață Enriques, atunci $\omega_X \not\cong \mathcal{O}_X$ și $\omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$, deci $p_2 = 1$.

Demonstrație. Deoarece $c(X) = 0$ și $p_g = 0$, avem $\omega_X \not\cong \mathcal{O}_X$. Pe de altă parte, avem după teorema Riemann-Roch:

$$\chi(\mathcal{O}_X(-K)) = \chi(\mathcal{O}_X) = 1.$$

Deci $\dim H^0(\mathcal{O}_X(-K)) + \dim H^2(\mathcal{O}_X(-K)) \geq 1$. După dualitatea Serre $\dim H^2(\mathcal{O}_X(-K)) = \dim H^0(\mathcal{O}_X(2K))$. Deoarece $-K \sim 0$ și $-K \approx 0$, rezultă că $H^0(\mathcal{O}_X(-K)) = 0$. Deci $\dim H^0(\mathcal{O}_X(2K)) \geq 1$, adică $p_2 \geq 1$. Cum $c(X) = 0$ avem și $p_2 \leq 1$, deci $p_2 = 1$. Însă cum $\omega_X^2 = \mathcal{O}_X(2K) \approx 0$ deducem $\omega_X^2 \cong \mathcal{O}_X$. Q.E.D.

(10.12) COROLAR. Dacă X este o suprafață Enriques, ordinul lui ω_X în $\text{Pic}(X)$ este egal cu 2.

(10.13) PROPOZIȚIE. Dacă X este o suprafață Enriques, atunci $\text{Pic}^\tau(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demonstrație. Deoarece $p_g = 0$, schema $\text{Pic}^\tau(X)$ este redusă (cf. teoremei (5.1)). Cum $H^1(O_X)$ este spațiul tangent în origine la grupul algebric $\text{Pic}^\tau(X)$, rezultă $\text{Pic}^\tau(X)$ este un grup finit și discret. Fie acum L un O_X -modul inversibil numeric echivalent cu zero. Din teorema Riemann-Roch rezultă $\chi(L) = \chi(O_X) = 1$, și deci $H^0(L) \neq 0$ sau $H^2(L) \neq 0$, sau încă ținând cont de dualitatea Serre, $H^0(L) \neq 0$ sau $H^0(\omega_X \otimes L^{-1}) \neq 0$. Cum L și $\omega_X \otimes L^{-1}$ sînt numeric echivalente cu zero, rezultă în definitiv $L \cong O_X$ sau $L \cong \omega_X$. Q.E.D.

(10.14) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață Enriques. Dacă $\text{car}(k) \neq 2$, există o acoperire etală $\pi : X' \rightarrow X$ de grad 2, cu X' suprafață K3 și grupul structural al lui π izomorf cu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Demonstrație. Fie $(f_{ij}) \in Z^1(\{U_i\}, O_X^*)$ un 1-cociclu ce reprezintă O_X -modul inversibil ω_X în $\text{Pic}(X) = H^1(X, O_X^*)$. Deoarece $\omega_X^2 \cong O_X$, (f_{ij}^2) este o 1-cofrontieră, deci putem scrie :

$$f_{ij}^2 = g_i/g_j \text{ pe } U_i \cap U_j, \quad g_i \in \Gamma(U_i, O_X^*).$$

Definim $\pi : X' \rightarrow X$ local prin acoperirea conexă și etală (deoarece $\text{car}(k) \neq 2$ $z_i^2 = g_i$ pe $U_i \times \mathbb{A}^1$ și lipind după $z_i/z_j = f_{ij}$ pe $(U_i \times \mathbb{A}^1) \cap (U_j \times \mathbb{A}^1)$).

Deoarece π este o acoperire etală și conexă (deci $\omega_{X'} \cong \pi^*(\omega_X)$), X' este o suprafață minimală cu $c(X) = 0$. După propoziția (9.7) $\chi(O_{X'}) = 2\chi(O_X) = 2$. Din tabelul (10.1) vedem că X' este suprafață K3. Q.E.D.

(10.15) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață ce admite o acoperire etală și conexă $\pi : X' \rightarrow X$ de grad 2, cu X' suprafață K3. Dacă caracteristica lui k este diferită de 2, atunci X este o suprafață Enriques.

Demonstrație. Deoarece π este morfism etal avem $\omega_{X'} \cong \pi^*(\omega_X)$, și cum $\omega_{X'} \cong O_{X'}$, rezultă atunci $\omega_X \cong 0$, adică $c(X) = 0$. Propoziția (9.7) implică $\chi(O_X) = \frac{1}{2} \chi(O_{X'}) = 1$ deoarece X' este suprafață K3. Q.E.D.

(10.16) Exemple de suprafețe Enriques. Fie în P^5 ($\text{car}(k) \neq 2$) suprafața X' dată de trei ecuații de forma

$$f_i(x_0, \dots, x_5) = Q_i(x_0, x_1, x_2) + Q'_i(x_3, x_4, x_5) = 0, \quad (i = 1, 2, 3),$$

unde Q_i și Q'_i sînt forme pătratice de trei variabile.

Cu teorema lui Bertini se vede că o astfel de suprafață X' generică este nesingulară. Considerăm atunci involuția :

$$\sigma : P^5 \rightarrow P^5$$

dată de $\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_0, x_1, x_2, -x_3, -x_4, -x_5)$. Atunci $\sigma(X') = X'$ și mulțimea punctelor fixe ale lui σ coincide cu reuniunea planelor $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ și $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Dacă conicele $Q_i = 0$ (resp. $Q'_i = 0$) din P^2 ($i = 1, 2, 3$) nu au nici un punct comun (ceea ce are loc în cazul generic), atunci restricția $\sigma' = \sigma/X'$ este o involuție pe X' fără puncte fixe. Putem considera deci suprafața (proiectivă și nesingulară) $X = X'/\sigma'$. Morfismul canonic $\pi : X' \rightarrow X$ este atunci o acoperire etală de grad 2 a lui X . După (10.4) X' este o suprafață $K3$, iar după (10.15) X este suprafață Enriques.

(10.17) TEOREMĂ. Orice suprafață Enriques X este eliptică sau cvasieliptică (în caracteristică $\neq 2, 3$ X este totdeauna eliptică).

Demonstrație. După (7.11) este suficient să arătăm că există pe X o curbă integră C cu $p_a(C) = 1$. Într-adevăr, deoarece $K \approx 0$, C este atunci o curbă indecompozabilă de tip canonic.

Presupunem prin absurd că o asemenea curbă integră C cu $p_a(C) = 1$ nu există pe X .

Dacă C' este o curbă integră arbitrară pe X , atunci (C'^2) este totdeauna un număr par deoarece $(C'^2) = 2p_a(C') - 2$. Dacă C' este o secțiune hiperplană generică pe X , atunci $(C'^2) > 0$ și deci $p_a(C') > 1$. Altfel spus, există pe X întotdeauna curbe integrale C' (chiar nesingulare) de gen aritmetic > 1 .

În continuare vom fixa o curbă integră C pe X cu $p_a(C) > 1$ și $p_a(C)$ minim.

(10.17.1) LEMĂ. În notațiile și ipotezele de mai sus, fie $|\Delta| \neq \emptyset$ un sistem linear complet cu $(\Delta^2) > 0$. Atunci partea mobilă $|D|$ a lui $|\Delta|$ este ireductibilă (adică conține cel puțin un membru ireductibil) și $(D^2) > 0$.

Demonstrația lemei (10.17.1). Teorema lui Riemann-Roch arată că $\dim |\Delta| \geq 1$.

Presupunem mai întâi că $|\Delta|$ nu are componente fixe și vom arăta că $|\Delta|$ este ireductibil. Dacă $|\Delta|$ nu are componente fixe, are un număr finit de puncte bază. Fie $f : X \rightarrow B$ aplicația rațională dedusă din factorizarea Stein a aplicației raționale $\varphi_{|\Delta|} : X \rightarrow B' = \varphi_{|\Delta|}(X) \subset |\Delta|$, cu B normalizata lui B' în corpul funcțiilor raționale $k(X)$. Deoarece $O_X(\Delta) \cong \varphi_{|\Delta|}^*(O_{B'}(1))$, atunci $O_X(\Delta) \cong f^*(L)$, cu $L = \pi^*(O_{B'}(1))$ amplu pe B (π fiind morfismul finit de normalizare definit pe B cu valori în B').

Dacă $|\Delta|$ ar fi reductibil, atunci $\dim(B) = 1$ (adică $|\Delta|$ ar fi compus cu un fascicul de curbe pe X). În plus, cum fibra generală a lui f este ireductibilă (cf. (7.3)), avem $\deg(L) = n > 1$.

Dacă $g: X' \rightarrow X$ este o compunere convenabilă de transformări pătratice astfel încât $f \circ g$ să fie morfism, avem $H^1(O_{X'}) = H^1(O_X) = 0$ iar din șirul exact

$$0 \rightarrow H^1(O_B) \rightarrow H^1(O_{X'}) = 0$$

deducem că B este izomorfă cu dreapta proiectivă. În aceste condiții avem:

$$\dim |\Delta| = \dim |L| = \deg(L) = n \text{ (deoarece } B = P^1).$$

Pe de altă parte, din teorema Riemann-Roch deducem

$$\dim |\Delta| \geq n^2/2 \cdot (F^2) \geq n^2,$$

unde F este o fibră integră a lui f . (Într-adevăr, avem $(F^2) \geq 2$ deoarece (F^2) este număr par și $(\Delta^2) > 0$.)

Comparând relațiile de mai sus deducem $n \geq n^2$, ceea ce contrazice faptul că $n > 1$. Deci $|\Delta|$ este ireductibil dacă $|\Delta|$ nu are componente fixe.

Fie acum $|\Delta|$ arbitrar. Dacă demonstrăm că $(D^2) > 0$, atunci sistemul $|D|$ este ireductibil după cele arătate mai sus. Fie $D = \sum_i n_i E_i$ cu $n_i \geq 1$ și E_i curbe integrale ($E_i \neq E_j$ dacă $i \neq j$). Deoarece $|D|$ nu are componente fixe, avem $(D^2) \geq 0$. (Anume, fie $D_i \in |D|$ un divizor al cărui suport nu conține pe E_i ; atunci $(D \cdot E_i) = (D_i \cdot E_i) \geq 0$, și deci $(D^2) = \sum_i n_i (D \cdot E_i) \geq 0$.)

Dacă $(D^2) = 0$, avem $(D \cdot E_i) = 0$ pentru orice i , deoarece în orice caz $(D \cdot E_i) \geq 0$ și $0 = (D^2) = \sum_i n_i (D \cdot E_i)$. Cum $K \approx 0$, rezultă atunci că D este un divizor de tip canonic, și după (7.11) concluzia teoremei (10.17) ar fi adevărată, ceea ce noi n-am presupus. Deci $(D^2) > 0$. Q.E.D.

(10.17.2) LEMĂ. Fie C o curbă integră pe X cu $p_a(C) > 1$ și $p_a(C)$ minim. Atunci

$$\dim |C| = \dim |K + C| = p_a(C) - 1 = \frac{1}{2}(C^2).$$

și sistemul linear $|K + C|$ este ireductibil și redus.

Demonstrația lemei (10.17.2). Din șirul exact $0 \rightarrow O_X(-C) \rightarrow O_X \rightarrow O_C \rightarrow 0$ deducem șirul exact de coomologie:

$$H^0(O_X) \rightarrow H^0(O_C) \rightarrow H^1(O_X(-C)) \rightarrow H^1(O_X) = 0.$$

Cum $H^0(O_X) = H^0(O_C) = k$, rezultă că $H^1(O_X(-C)) = 0$ și deci după dualitatea Serre, $H^1(O_X(K+C)) = 0$. După teorema Riemann-Roch avem :

$$\begin{aligned}\dim |K+C| &= \frac{1}{2}(C^2) + \dim H^1(O_X(K+C)) = \\ &= \frac{1}{2}(C^2) = p_a(C) - 1,\end{aligned}$$

deoarece $\dim H^2(O_X(K+C)) = \dim H^0(O_X(-C)) = 0$.

Fie D partea mobilă a sistemului linear $|K+C|$ și Γ partea sa fixă. Din (10.17.1) deducem că D este ireductibil și $p_a(D) > 1$. Dacă termenul general al lui $|D|$ nu ar fi integră, atunci după teorema lui Bertini ar rezulta că termenul general al lui $|D|$ ar fi de forma $p^e F$, cu F curbă integră, unde p este exponentul caracteristic al lui k și $e \geq 1$. Însă din teorema Riemann-Roch deducem $p_a(D) - 1 \leq \dim |D| = \dim |K+C| = p_a(C) - 1$, și deci $1 < p_a(D) \leq p_a(C)$. Atunci

$$p_a(F) = \frac{1}{2}(F^2) + 1, \quad p_a(D) = \frac{1}{2}p^{2e}(F^2) + 1.$$

Deci $1 < p_a(F) < p_a(D) \leq p_a(C)$, fapt ce contrazice minimalitatea lui $p_a(C)$. Deci termenul general al lui $|D|$ este integră și în plus, $p_a(D) = p_a(C)$, adică $(D^2) = (C^2)$. Însă

$$(C^2) = ((D+\Gamma)^2) = (D^2) + 2(D \cdot \Gamma) + (\Gamma^2),$$

de unde

$$(*) \quad 2(D \cdot \Gamma) + (\Gamma^2) = 0.$$

Dacă $(\Gamma^2) < 0$, atunci $(D \cdot \Gamma) > 0$ și deci $0 > (D \cdot \Gamma) + (\Gamma^2) = (D + \Gamma \cdot \Gamma) = (C \cdot \Gamma)$, lucru imposibil pentru o curbă C cu $(C^2) > 0$. Rezultă deci $(\Gamma^2) \geq 0$.

Dacă $(\Gamma^2) = 0$ și $\Gamma \neq 0$, din teorema Riemann-Roch deducem $\dim |\Gamma + K| \geq 0$, deci există $\Gamma' \in |\Gamma + K|$, $\Gamma' \neq \Gamma$. Cum $2\Gamma \sim 2\Gamma'$ (deoarece $2K \sim 0$), rezultă $\dim |2\Gamma| \geq 1$. Din această ultimă inegalitate deducem că pentru orice punct $x \in X$ există în $|2\Gamma|$ o curbă ce trece prin punctul x . Fie atunci $D_0 \in |D|$ o curbă integră, $x \in D_0$ un punct al său și $\Delta \in |2\Gamma|$ un divisor ce trece prin punctul x . Cum $(\Gamma^2) = 0$ implică ținând cont de (*) $(D \cdot \Gamma) = 0$, avem $(D_0 \cdot \Delta) = 0$. De aici deducem că D_0 este o componentă a lui Δ și $D_1 = \Delta - D_0 > 0$. Cum $(D^2) > 0$ și $(\Gamma^2) = 0$, avem $(\Delta^2) = (D^2) + 2(D \cdot D_1) + (D_1^2) = 0$, și deci $2(D \cdot D_1) + (D_1^2) < 0$ (deoarece $(D^2) > 0$). Avem $(D \cdot D_1) \geq 0$ ($|D|$ este ireductibil și $(D^2) > 0$) deci $(D \cdot D_1) + (D_1^2) = ((D+D_1) \cdot D_1) < 0$. Aceasta înseamnă $((D +$

$+ D_1) \cdot D) = ((D + D_1)^2) - ((D + D_1) \cdot D_1) = (\Delta^2) - ((D + D_1) \cdot D_1) = -((D + D_1) \cdot D_1) > 0$ Altfel spus, $(D \cdot \Gamma) > 0$, contradicție. Deci situația $(\Gamma^2) = 0$ și $\Gamma \neq 0$ este absurdă.

Acum ținând cont că $\dim |\Gamma| \geq \frac{1}{2} (\Gamma^2)$ și $\dim |\Gamma| = 0$, re-

zultă întotdeauna $(\Gamma^2) \leq 0$. Am utilizat aici următoarea observație simplă: dacă $|E| \neq \emptyset$ este un sistem linear complet și F partea sa fixă, atunci $\dim |F| = 0$. Într-adevăr, notînd prin $|E'|$ partea mobilă a sistemului $|E|$, dacă prin absurd $\dim |F| \geq 1$, ar exista un $F' \in |F|$, $F' \neq F$. Atunci pentru orice $G \in |E'|$ avem $G + F' \geq F$. Fie H o componentă ce apare în F cu coeficient strict mai mare decît coeficientul cu care apare ea în F' . Atunci inegalitatea de mai sus arată că $G \geq H$. Rezultă atunci că $|E'|$ are pe H drept componentă fixă, lucru imposibil deoarece $|E'|$ este partea mobilă a lui $|E|$.

În concluzie $\Gamma = 0$, adică sistemul linear complet $|C + K|$ nu are componente fixe, iar termenul său general este ireductibil și redus. Acum exact ca la începutul demonstrației rezultă că $\dim H^1(O_X(C)) = \dim H^1(O_X(K + C + K)) = 0$. Teorema Riemann-Roch implică

$$\dim |C| \parallel \frac{1}{2} (C^2) + \dim H^1(O_X(C)) = \frac{1}{2} (C^2) \quad \text{Q.E.D.}$$

(10.17.3) COROLAR. În notațiile și ipotezele lui (10.17.2) avem

$$\dim |2C| = 2(C^2) = 4p_a(C) - 4.$$

Demonstrația corolarului (10.17.3). Teorema Riemann-Roch implică $\dim |2C| = 2(C^2) + \dim H^1(O_X(2C))$. Rămîne deci de arătat că $H^1(O_X(2C)) = 0$, sau după dualitatea Serre, $H^1(O_X(K - 2C)) = 0$. Șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(K - 2C) \rightarrow O_X(K - C) \rightarrow F \rightarrow 0,$$

cu F inversibil pe C și $\deg(F) = -(C^2) < 0$, induce șirul exact de coomologie:

$$0 = H^0(F) \rightarrow H^1(O_X(K - 2C)) \rightarrow H^1(O_X(K - C)).$$

Însă $\dim H^1(O_X(K - C)) = \dim H^1(O_X(C)) = 0$ conform lemei (10.17.2) Q.E.D.

(10.17.4) Fie acum C curba integră pe X cu $g = p_a(C) > 1$ minim. Din (10.17.2) și (10.17.3) rezultă

$$\begin{aligned} \dim |C| &= g - 1, \\ \dim |2C| &= 4g - 4. \end{aligned}$$

Fie $V_1 = \{\Delta \in |2C| \mid \exists C_1, C_2 \in |C| \text{ astfel încît } \Delta = C_1 + C_2\}$ și $V_2 = \{\Delta \in |2C| = |2C + 2K| \mid \exists C'_1, C'_2 \in |C + K| \text{ astfel încît } \Delta = C'_1 + C'_2\}$.

(10.17.5) LEMĂ. Multimile V_1 și V_2 sînt submultimi algebrice închise în $|2C| = P^{4g-4}$ fiecare de dimensiune $2g - 2$.

Demonstrația lemei (10.17.5). Fie C_1 și $C_2 \in |C|$ două curbe integrale ($C_1 \neq C_2$) linear echivalente cu C , și fie $\alpha_1 \in k(X)$ o funcție rațională astfel încît $\text{div}_X(\alpha_1) = C_2 - C_1$. Ideea de demonstrație este de a alege baze vectoriale convenabile în $H^0(O_X(C))$ și $H^0(O_X(2C))$ astfel încît algebricitatea submultimilor V_1 și V_2 ale spațiului proiectiv $P(H^0(O_X(2C)))$ (precum și faptul că $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2g - 2$) să devină evidente.

Fie $L(C_1) = \{f \in k(X)^* \mid \text{div}_X(f) + C_1 \geq 0\} \cup \{0\}$. Atunci au loc izomorfismele $H^0(O_X(C)) \cong L(C_1) \cong L(C_2)$, de unde izomorfismele $|C| = P(H^0(O_X(C))) \cong P(L(C_1)) \cong P(L(C_2))$. De exemplu izomorfismul $P(L(C_1)) \cong P(H^0(O_X(C))) = |C|$ se realizează în felul următor: dacă $f \in L(C_1)$, $f \neq 0$, atunci $\hat{f} \in P(L(C_1)) \mapsto \text{div}_X(f) + C_1 \in |C|$.

Fie acum $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{g-1} \in L(C_1)$ o bază a k -spațiului vectorial $L(C_1)$. Atunci este clar că funcțiile $\beta_0 = 1/\alpha_1, \beta_1 = 1, \beta_2 = \alpha_2/\alpha_1, \dots, \beta_{g-1} = \alpha_{g-1}/\alpha_1$ reprezintă o bază vectorială a lui $L(C_2)$. În plus, dacă $\Delta \in |C|$, atunci coordonatele omogene ale lui Δ în baza $\alpha_0, \dots, \alpha_{g-1}$ coincid cu coordonatele omogene ale lui Δ în baza $\beta_0, \dots, \beta_{g-1}$. Deoarece $L(C_1)$ și $L(C_2)$ sînt subspații vectoriale ale lui $L(C_1 + C_2)$, atunci α_i și β_j aparțin lui $L(C_1 + C_2)$. Mai mult, elementele $\gamma_0 = \alpha_0, \gamma_1 = \alpha_1, \dots, \gamma_{g-1} = \alpha_{g-1}, \gamma_g = \beta_0, \gamma_{g+1} = \beta_2, \dots, \gamma_{2g-2} = \beta_{g-1}$ sînt linear independente peste k . Într-adevăr, dacă

$$\sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \alpha_i + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{g-1} \lambda'_j \beta_j = 0, \quad \lambda_i, \lambda'_j \in k,$$

este o combinație lineară egală cu zero de elementele $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2g-2}$, atunci avem:

$$\alpha_1 \left(\sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \alpha_i \right) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{g-1} \lambda'_j \alpha_j = 0$$

Notînd cu $\alpha = \sum_{i=0}^{g-1} \lambda_i \alpha_i$ și cu $\beta = - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{g-1} \lambda'_j \alpha_j$, avem $\alpha_1 \cdot \alpha = \beta$, de unde $\text{div}_X(\alpha_1) + \text{div}_X(\alpha) = \text{div}_X(\beta)$, sau încă $\text{div}_X(\alpha) +$

$+ C_2 = \text{div}_X(\beta) + C_1 \geq 0$ deoarece $\beta \in L(C_1)$. Deci $\text{div}_X(\alpha) + C_2 \geq 0$ și cum $\alpha \in L(C_1)$, $\text{div}_X(\alpha) + C_1 \geq 0$. Din modul în care am ales pe C_1 și C_2 rezultă că $\text{div}_X(\alpha) \geq 0$, și deci $\alpha = \lambda_0 \in k$. Însă atunci obținem

$$\lambda_0 \alpha_1 + \lambda'_0 + \lambda'_2 \alpha_2 + \dots + \lambda'_{g-1} \alpha_{g-1} = 0$$

de unde $\lambda_0 = \lambda'_0 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_{g-1} = 0$ și afirmația că $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2g-2}$ sînt linear independente este dovedită.

Completăm acum sistemul $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{2g-2} \in L(C_1 + C_2) \cong L(2C)$ la o bază $\gamma_0, \dots, \gamma_{2g-2}, \gamma_{2g-1}, \dots, \gamma_{4g-4}$. Vom identifica $|2C|$ cu P^{4g-4} via această bază. Atunci un punct $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{4g-4}) \in P^{4g-4}$ aparține mulțimii V_1 dacă și numai dacă există $(\mu_0, \dots, \mu_{g-1}), (v_0, \dots, v_{g-1}) \in P^{g-1}$ astfel încît

$$\sum_{i=0}^{4g-4} \lambda_i \gamma_i = \rho \left(\sum_{j=0}^{g-1} \mu_j \alpha_j \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{g-1} v_l \beta_l \right),$$

sau încă

$$(*) \quad \sum_{i=0}^{4g-4} \lambda_i \gamma_i = \rho \sum_{j,l=0}^{g-1} \mu_j v_l \cdot \alpha_j \beta_l, \quad \rho \in k^*$$

Însă $\alpha_j \beta_l = \alpha_l \beta_j = \alpha_l \cdot \alpha_j / \alpha_1 \in L(C_1 + C_2)$, deci

$$(**) \quad \alpha_j \beta_l = \sum_{i=0}^{4g-4} a_i^{jl} \gamma_i, \quad a_i^{jl} \in k \quad (a_i^{jl} = a_i^{lj}).$$

Substituind (**) în (*) obținem

$$\lambda_i = \rho \cdot \sum_{j,l=0}^{g-1} a_i^{jl} \mu_j v_l \left(= \rho \sum_{j,l=0}^{g-1} a_i^{lj} \mu_j v_l \right), \quad i = 0, \dots, 4g-4.$$

Aceste relații reprezintă ecuațiile parametrice ale mulțimii V_1 , de unde se vede că V_1 este subvarietate algebrică în P^{4g-4} de dimensiune $2g - 2$. Absolut la fel se demonstrează afirmația în legătură cu mulțimea V_2 . Q.E.D.

(10.17.6) *Continuarea demonstrației teoremei (10.17).* Din lema (10.17.5) rezultă că $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$, deci că există un divisor $\Delta \in |2C|$ astfel încît să avem :

$$\Delta = C_1 + C_2, \quad C_1, C_2 \in |C|,$$

$$\Delta = C'_1 + C'_2, \quad C'_1, C'_2 \in |C + K|.$$

Fie Γ partea comună a curbelor C_1, C_2, C'_1 și C'_2 . Considerăm atunci sistemul de ecuații în D_1, D_2, D_3 și D_4 :

$$(*) \quad \begin{cases} D_1 + D_2 = C_1 - \Gamma, & D_1 + D_3 = C'_1 - \Gamma, \\ D_3 + D_4 = C_2 - \Gamma, & D_2 + D_4 = C'_2 - \Gamma. \end{cases}$$

Dacă punem $C_1 - \Gamma = \sum_i a_i E_i$, $C_2 - \Gamma = \sum_i b_i E_i$, $C'_1 - \Gamma = \sum_i c_i E_i$, $C'_2 - \Gamma = \sum_i d_i E_i$, cu E_i curbe integrale (distincte două câte două), a_i, b_i, c_i, d_i întregi nenegativi astfel încât $a_i + b_i + c_i + d_i \geq 0$ și $a_i + b_i = c_i + d_i$ pentru orice i , și de asemenea $D_1 = \sum_i x_i E_i$, $D_2 = \sum_i y_i E_i$, $D_3 = \sum_i z_i E_i$ și $D_4 = \sum_i u_i E_i$, atunci sistemul de mai sus devine:

$$(**) \quad \begin{cases} x_i + y_i = a_i, & x_i + z_i = c_i, \\ z_i + u_i = b_i, & y_i + u_i = d_i. \end{cases}$$

Deoarece componenta comună a membrilor din dreapta ai sistemului (*) este egală cu zero, avem și condiția $a_i b_i c_i d_i = 0$ pentru orice i . După cum este ușor de arătat, din această condiție rezultă existența unei soluții a sistemului (**) ce satisface condițiile $x_i u_i = y_i z_i = 0$.

Obținem deci o soluție (D_1, D_2, D_3, D_4) a sistemului (*) ce satisface condițiile:

a) $D_i \geq 0$.

b) Divizorii D_1 și D_4 (resp. D_2 și D_3) nu au componente comune.

În plus avem $D_1 + D_3 \sim D_1 + D_2 + K$; $D_2 + D_4 \sim D_2 + D_1 + K$. Sau încă $D_3 \sim D_2 + K$ și $D_4 \sim D_1 + K$.

De aici rezultă că $D_i > 0$ pentru orice $i = 1, 2, 3, 4$ și în plus, $(D_i^2) \geq 0$ pentru orice $i = 1, 2, 3, 4$. (De exemplu $(D_2^2) = (D_3 \cdot D_2) \geq 0$ deoarece D_3 și D_2 nu au componente comune.

Dacă pentru un i am avea $(D_i^2) = 0$, atunci punând $D_i = \sum_j n_{ij} F_{ij}$ ($n_{ij} \geq 1$ și F_{ij} curbe integrale distincte două câte două), atunci $(D_i \cdot F_{ij}) \geq 0$. (De exemplu pentru $i = 2$: atunci dacă F_{2j} este componentă a lui D_2 , F_{2j} nu mai poate fi componentă a lui D_3 , și deci $(D_2 \cdot F_{2j}) = (D_3 \cdot F_{2j}) \geq 0$.) Însă relația

$$0 = (D_i^2) = \sum_j n_{ij} (D_i \cdot F_{ij})$$

implică $(D_i \cdot F_{ij}) = 0$ pentru orice j . Cum $K \approx 0$, aceasta înseamnă că D_i este un divizor de tip canonic, și deci după (7.11), X este eliptică sau cvasieliptică, ceea ce noi am exclus.

Deci $(D_i^2) > 0$ pentru orice $i = 1, 2, 3, 4$. Fie atunci $|C'|$ partea mobilă a sistemului linear complet $|D_1|$. Lema (10.17.1) arată că $|C'|$ este ireductibil și $(C'^2) > 0$. Din teorema Riemann-Roch deducem $\dim |D_2| \geq 1/2 (D_2^2) \geq 1$, și deci D_2 nu poate fi partea fixă a sistemului linear complet $|D_1 + D_2|$ (vezi observația de la finalul demonstrației lui (10.17.2)), de unde deducem $\dim |D_1| < \dim |D_1 + D_2|$. Prin urmare obținem: $\dim |C'| = \dim |D_1| < \dim |D_1 + D_2| = \dim |C_1 - \Gamma| \leq \dim |C_1| = \dim |C|$.

Din lema (10.17.2) avem $\dim |C| = 1/2 (C^2)$, iar $\dim |C'| \geq 1/2 (C'^2)$. Ținând cont de inegalitățile de mai sus, am obținut $(C'^2) < (C^2)$, sau încă $1 < p_a(C') < p_a(C)$, cu C' curbă ireductibilă. Însă dacă $C'' = C'_{\text{red}}$, atunci $p_a(C'') > 1$ (deoarece $(C''^2) > 0$ rezultă din $(C'^2) > 0$) și $p_a(C'') \leq p_a(C') < p_a(C)$, fapt ce contrazice modul de alegere al lui C . Teorema (10.17) este astfel complet demonstrată. Q.E.D.

(10.18) Trecem acum să studiem suprafețele minimale X cu $c(X) = 0$ și $b_2 = 6$. Din tabelul (10.1) rezultă atunci că avem: $b_1 = 4$, $\chi(O_X) = 0$, $q = 2$, $p_g = 1$ și $\Delta = 0$. Observăm mai întâi că orice varietate abeliană X de dimensiune 2 are invariantii menționați mai sus, adică $c(X) = 0$, $b_2 = 6$ etc.

Într-adevăr, dacă X este o varietate abeliană de dimensiune oarecare (să zicem $d \geq 1$), atunci avem (vezi Mumford [2], § 13):

$$\dim H^p(X, O_X) = \binom{d}{p}.$$

Deci dacă X este suprafață abeliană, avem mai întâi $K \approx 0$ și apoi $q = 2$ și $p_g = 1$. Pe de altă parte, deoarece o varietate abeliană satisface egalitatea $\dim \text{Pic}^0(X) = \dim(X)$, avem, conform teoremei (5.1), $\Delta = 0$. Din formula lui Noether deducem atunci $b_2 = 6$.

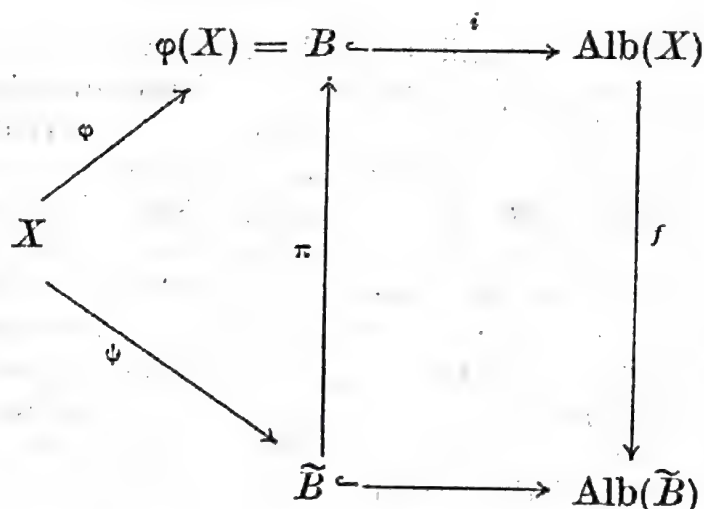
Vom demonstra acum că suprafețele abeliene X sînt singurele suprafețe minimale cu $c(X) = 0$ și $b_2 = 6$.

(10.19) TEOREMĂ. Orice suprafață minimală X cu $c(X) = 0$ și $b_2 = 6$ este suprafață abeliană.

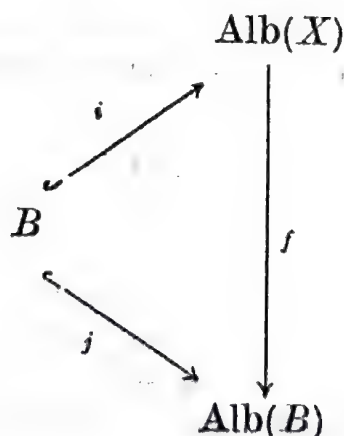
Demonstrație. Ne vom mărgini (pentru a nu complica prea mult lucrurile) la a da un argument valabil doar în caracteristică zero. Rezultatul este însă valabil în orice caracteristică (vezi Bombieri-Mumford [1]).

Fie $\varphi : X \rightarrow \text{Alb}(X)$ morfismul Albanese. Deoarece $g = 2$ și $\Delta = 0$, atunci $\dim \text{Alb}(X) = 2$ (cf. (5.3)). Dacă nu vom specifica anume o mare parte din demonstrație rămâne valabilă și în caracteristică pozitivă.

Arătăm mai întâi că morfismul φ este surjectiv. Dacă prin absurd φ nu ar fi surjectiv, atunci $\varphi(X) = B$ ar fi o curbă, deoarece $\varphi(X)$ nu poate fi punct ($\varphi(X)$ nu ar mai genera pe $\text{Alb}(X)$). Dacă B este curbă, vom arăta că B este curbă nesingulară de gen 2. În acest scop, fie $\pi : \tilde{B} \rightarrow B$ normalizata curbei B (cu π morfism finit și birațional). Din proprietatea de universalitate a lui $\text{Alb}(X)$ rezultă că există un unic morfism $f : \text{Alb}(X) \rightarrow \text{Alb}(\tilde{B}) = \text{Jac}(\tilde{B})$ (jacobiana curbei \tilde{B}) astfel încât următoarea diagramă să fie comutativă :



Fie $\pi' = f|_B : B \rightarrow \tilde{B}$. Rezultă atunci imediat că $\pi' \circ \pi = 1_{\tilde{B}}$ și $\pi \circ \pi' = 1_B$, și deci π este izomorfism. Altfel spus, curba B este nesingulară. Deoarece $B = \tilde{B}$, diagrama de mai sus se reduce la diagrama comutativă :



Din proprietatea de universalitate a varietății $\text{Alb}(X)$ obținem un unic morfism de varietăți abeliene $g: \text{Alb}(B) \rightarrow \text{Alb}(X)$ care face comutativă diagrama :

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Alb}(X) \\ & \nearrow i & \\ B & & \\ & \searrow j & \\ & & \text{Alb}(B) \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow g \\ \downarrow \end{array}$$

Cum $i(B)$ generează pe $\text{Alb}(X)$ și $j(B)$ generează pe $\text{Alb}(B)$, rezultă imediat că f și g sînt izomorfisme inverse unul altuia. În particular, $\dim \text{Alb}(B) = 2$, și deci genul lui B este 2.

Demonstrăm acum, folosind criteriul Nakai-Moishezon, că B este divizor amplu pe $A = \text{Alb}(X)$. Formula genului și faptul că $\omega_A \cong \mathcal{O}_A$ ne dau $(B^2) = 2$. Ca să arătăm că B este divizor amplu pe A rămîne deci să probăm că dacă C este o curbă integră arbitrară pe A , atunci $(B \cdot C) > 0$. Fie pentru aceasta $z \in C$ un punct arbitrar pe curba C . Cum B generează pe A , există două puncte x și $y \in B$ astfel încît $z = x - y$ (în operația de grup a lui A). De aici rezultă că $x \in B \cap (y + C) = B \cap t_{-y}^*(C)$ (t_{-y} fiind translația $v \mapsto -y + v$). Însă din formula pătratului (vezi Mumford [2], § 6) rezultă că $t_{-y}^*(C)$ este algebric echivalent cu C , și deci :

$$(B \cdot C) = (B \cdot t_{-y}^*(C)) > 0.$$

deoarece $B \cap t_{-y}^*(C) \neq \emptyset$ și $(B^2) > 0$.

Deci B este divizor amplu pe A . Fie acum n un întreg prim cu caracteristica lui k . Considerăm diagrama carteziană :

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\text{Alb}(X)} \text{Alb}(X) = X' & \xrightarrow{\psi} & \text{Alb}(X) \\ f \downarrow & & \downarrow n \\ X & \xrightarrow{\quad} & \text{Alb}(X) \end{array}$$

Cum n (multiplicarea cu n) este atunci morfism etal (vezi Mumford [2], § 6) de grad n^4 , rezultă că f este de asemenea morfism etal,

și deci X' este suprafață nesingulară. Avem $\psi(X') = n^{-1}(\psi(X)) = n^{-1}(B)$. Rezultă că restricția lui n la $\psi(X')$ este un morfism etal de grad n^4 . Deoarece n este finit, B amplu pe A și $\psi(X') = n^{-1}(B)$, rezultă că $\psi(X')$ este un divizor amplu pe A . Cum A este o suprafață proiectivă și nesingulară, teorema Enriques-Severi-Zariski-Serre implică conexitatea curbei $\psi(X')$. Deci obținem acoperirea etală și conexă de grad n^4 $\psi(X') \rightarrow B$. Cum genul lui B este 2, rezultă că genul curbei nesingulare $\psi(X')$ este > 2 . Fie X'_0 o componentă conexă a lui X' astfel încât $\psi(X'_0) = \psi(X')$. Avem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} X'_0 & \xrightarrow{u} & \text{Alb}(X'_0) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \\ \psi(X') & \xrightarrow{v} & \text{Alb}(\psi(X')) = \text{Jac}(\psi(X')) \end{array}$$

Cum $v(\psi(X'_0))$ generează pe $\text{Alb}(\psi(X'))$, rezultă că morfismul f este surjectiv. Deci $q(X'_0) \geq \dim \text{Alb}(X'_0) \geq \dim \text{Alb}(\psi(X')) = \text{genul lui } \psi(X') > 2$. Am obținut deci o suprafață (proiectivă și nesingulară) X'_0 cu $\omega_{X'_0} \cong \mathcal{O}_{X'_0}$ și $q(X'_0) > 2$. Or, în tabelul (10.1) asemenea suprafețe nu figurează. Contradicția a provenit din ipoteza că morfismul φ nu este surjectiv.

Deci $\varphi: X \rightarrow A = \text{Alb}(X)$ este un morfism surjectiv de suprafețe, deci de grad finit. Mai mult, φ este chiar un morfism finit. Pentru a dovedi acest lucru, considerăm factorizarea Stein a lui φ :

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow \varphi' & \downarrow \varphi'' \\ X & & \\ & \searrow \varphi & \\ & & A \end{array}$$

cu φ'' morfism finit și φ' morfism birățional. Dacă φ nu ar fi finit, φ' nu ar fi izomorfism. Există deci o curbă integră E pe X astfel încât $\varphi'(E)$ să fie un punct pe Y . După (2.7) $(E^2) < 0$, iar formula genului și faptul că X este model minimal implică $p_a(E) = 0$ și

$(E^2) = -2$. Prin urmare Y este o suprafață normală care are drept singularități cel mult puncte raționale duble (în număr finit). Din teorema (3.15) rezultă că fasciculul dualizant ω_Y este inversibil și $\omega_X \cong \varphi'^*(\omega_Y)$. Cum $\omega_X \cong O_X$ rezultă de asemenea $\omega_Y \cong O_Y$.

Considerăm atunci morfismul finit φ'' . Scoțînd eventual un număr de puncte ale lui A (anume imaginile prin φ'' ale tuturor punctelor raționale duble ale lui Y), obținem un morfism finit și plat $\tilde{\varphi}: Y' \rightarrow A'$ de suprafețe nesingulare astfel încît $\omega_{A'}$ și $\omega_{Y'}$ sînt triviale. Deoarece ne găsim în caracteristică zero, $\tilde{\varphi}$ este un morfism separabil. Fie ω o formă diferențială de grad 2 nenulă și regulată pe A' ; atunci $\tilde{\varphi}^*(\omega)$ este o formă nenulă și regulată pe Y' . Cum $\tilde{\varphi}^*(\omega)$ se anulează exact în punctele lui Y' în care $\tilde{\varphi}$ nu este morfism etal, și cum $\omega_{Y'} \cong O_{Y'}$, rezultă că $\tilde{\varphi}$ este etal. Folosind teorema de puritate a locului de ramificare (vezi Altman-Kleiman [1], sau Grothendieck [6]) deducem că φ'' este etal peste tot, și cum A este nesingulară, atunci Y este nesingulară. Deci φ' este un izomorfism, sau încă morfismul Albanese $\varphi: X \rightarrow \text{Alb}(X)$ este morfism etal. Însă atunci un rezultat al lui Lang-Serre (vezi Mumford [2], § 18) afirmă că X are o structură de varietate abeliană astfel încît φ să devină o isogenie. Q.E.D.

(10.20) Ultima clasă de suprafețe minimale X cu $c(X) = 0$ o formează suprafețele cu $b_2 = 2$. Din tabelul (10.1) deducem atunci că $b_1 = 2$ și $\chi(O_X) = 0$. În acest caz sînt posibile două situații:

- a) $p_g = 0$, $q = 1$ și $\Delta = 0$, sau
- b) $p_g = 1$, $q = 2$ și $\Delta = 2$.

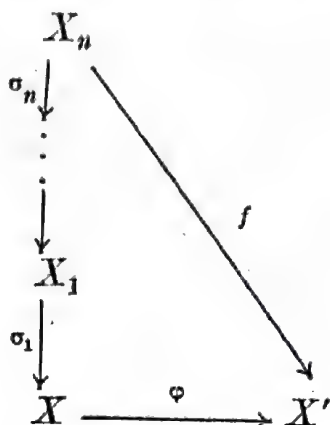
Această clasă de suprafețe a fost parțial studiată în § 8 (cf. (8.6) și (8.9)), unde am văzut că există două tipuri de astfel de suprafețe: hipereliptice sau cvasihipereliptice. Suprafețele cvasihipereliptice pot apărea numai în car 2 sau 3. Vom analiza acum structura suprafețelor hipereliptice în $\text{car} \neq 2$ și 3.

Fie deci X o suprafață hipereliptică ($\text{car}(k) \neq 2, 3$). După teorema (8.6) morfismul Albanese $f: X \rightarrow \text{Alb}(X) = B$ are următoarele proprietăți: B este curbă eliptică și orice fibră a lui f este o curbă eliptică nesingulară. De asemenea, teorema (8.9) arată că există o altă fibrare eliptică $g: X \rightarrow P^1$ care este transversală la fibrarea f . Comparînd aceste două fibrări eliptice, vom deduce structura suprafețelor hipereliptice.

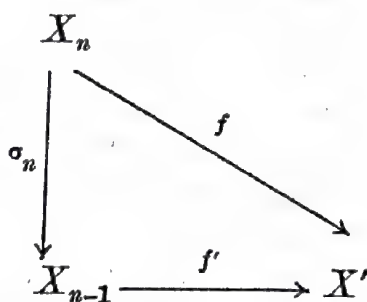
Înainte de aceasta însă avem nevoie de următorul rezultat care prezintă interes și în sine.

(10.21) **TEOREMĂ.** *Fie X și X' două suprafețe minimale cu $c(X) \geq 0$ și $c(X') \geq 0$, și fie $\varphi: X \rightarrow X'$ o aplicație birațională. Atunci φ este un izomorfism.*

Demonstrație. Avem de arătat că φ și φ^{-1} sînt morfisme. Să arătăm de exemplu că φ este morfism. Fie



n eclatări de puncte (cu structura redusă) astfel încît $f = \varphi \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$ să fie morfism. Presupunem că n este numărul minim de eclatări $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ cu proprietatea că $\varphi \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n$ devine morfism. Avem de arătat că $n = 0$. Dacă prin absurd $n > 0$, fie E curba excepțională din X_n pentru σ_n . Atunci $f(E) = F$ este o curbă pe X' , deoarece dacă $f(E)$ ar fi un punct, atunci f s-ar factoriza printr-un morfism f' :



și astfel s-ar contrazice minimalitatea lui n .

Afirmăm acum că $(\omega_{X'} \cdot F) < 0$. Dacă afirmația este dovedită, atunci rezultă că X' ar aparține clasei a) ((cf. 8.2)), și atunci după observația (8.3) a) am avea $c(X) = -1$. Absurditatea provine din ipoteza că φ nu este morfism.

Rămîne deci să demonstrăm afirmația. Demonstrația se face prin inducție după numărul eclatărilor ce intră în descompunerea lui f . Fie mai întîi $\sigma : U \rightarrow V$ o eclatare a suprafeței V de centru punctul $v \in V$, și fie D curba excepțională a lui σ . Dacă E' este o curbă integră pe U și $E'' = \sigma(E')$ este tot o curbă (pe V), atunci avem $(\omega_U \cdot E') = (\sigma^*(\omega_V) \otimes \mathcal{O}_U(D) \cdot \sigma^*(E'')) - (\sigma^*(\omega_V) \otimes \mathcal{O}_U(D) \cdot mD)$,

unde $m = (E' \cdot D)$. Deci $(\omega_U \cdot E') = (\sigma^*(\omega_V) \cdot \sigma^*(E'')) - m(D^2) = (\omega_V \cdot E'') + m \geq (\omega_V \cdot E'')$.

Însă observăm că deoarece E este o curbă excepțională de prima specie pe X_n avem $(\omega_{X_n} \cdot E) = -1$, de unde prin inducție $(\omega_X \cdot F) < 0$ și afirmația este dovedită. Q.E.D.

(10.22) COROLAR. Dacă X este o suprafață cu $c(X) \geq 0$, atunci clasa de izomorfism birațional a lui X conține (abstracție făcînd de un izomorfism bireglat) un singur model minimal.

(10.23) Observație. Dacă $c(X) = -1$ afirmația corolarului (10.22) este falsă. De exemplu $X = P^2$ este model minimal birațional izomorf (dar neizomorf) cu modelul minimal $P^1 \times P^1$. În § 12 vom clasifica modelele minimale ale suprafețelor X cu $c(X) = -1$.

(10.24) Revenim acum la analiza suprafețelor hipereliptice (în caracteristică diferită de 2 și 3), precum și la notațiile de la (10.20). Fie $F_b = f^{-1}(b)$ cu $b \in B$ și $F'_c = g^{-1}(c)$ cu $c \in P^1$. Deoarece $b_2 = 2$ și $b_2 \geq \rho$, lema (8.7) implică ireductibilitatea tuturor fibrelor lui g . (Acest fapt se poate deduce și direct în felul următor: dacă ar exista prin absurd o fibră F'_c de componente ireductibile E_1, \dots, E_n cu $n \geq 2$, atunci din (2.6) rezultă $(E_1^2) < 0$. Cum $\omega_X \approx 0$, formula genului implică $p_a(E_1) = 0$ și $(E_1^2) = -2$. Cum E_1 nu poate fi conținută în niciuna din fibrele lui f , rezultă că E_1 domină curba eliptică B , lucru evident absurd.)

Dacă F'_c este fibră multiplă a lui g , atunci $F''_c = (F'_c)_{\text{red}}$ este în orice caz curbă eliptică deoarece avem $p_a(F''_c) = 1$ și F''_c nu poate fi rațională (cu un punct cuspidal ordinar) deoarece F''_c domină pe B . Deci $F'_c = mF''_c$ cu $m \geq 2$ și F''_c curbă eliptică. Fie $S = \{c \in P^1 / F'_c \text{ multiplă}\}$. Atunci S este o submulțime finită a lui P^1 .

Pentru fiecare punct $c \in P^1$ notăm prin $f_c = \text{res}(f) : F'_c \rightarrow B$ restricția lui f la F'_c . Dacă $c \in P^1 - S$, atunci f_c este un morfism etal (F'_c și B sînt curbe eliptice și se ține cont de formula lui Hurwitz), și f_c induce omomorfismul de grupuri algebrice :

$$f_c : \underline{\text{Pic}}^0(B) \rightarrow \underline{\text{Pic}}^0(F'_c)$$

Însă pe o curbă eliptică B asocierea $b \mapsto$ clasa lui $O_B(b - b_0)$ în $\underline{\text{Pic}}^0(B)$ definește un izomorfism de grupuri algebrice între B și $\underline{\text{Pic}}^0(B)$, dacă ne fixăm un punct bază $b_0 \in B$ (care este originea lui B). Observăm acum că $\underline{\text{Pic}}^0(F'_c)$ acționează pe F'_c (cu $c \in P^1 - S$) de o manieră canonică prin translații: dacă L este un $O_{F'_c}$ -modul inversibil de grad zero, atunci L aplică punctul $x \in F'_c$ în unicul

punct $y \in F'_c$ astfel încît $L \otimes O_{F'_c}(x) = O_{F'_c}(y)$. Folosind omomorfismul f_c obținem o acțiune

$$B \times F'_c \rightarrow F'_c \text{ pentru orice } c \in P^1 - S.$$

Deoarece $\{f_c\}_{c \in P^1 - S}$ reprezintă o familie algebrică de omomorfisme de grupuri algebrice, obținem atunci o acțiune

$$\sigma_0 : B \times g^{-1}(P^1 - S) \rightarrow g^{-1}(P^1 - S).$$

În particular, fiecare element $b \in B$ definește un automorfism al lui $g^{-1}(P^1 - S)$ care după teorema (10.21) se prelungește în mod unic la un automorfism al lui X (deoarece X este model minimal cu $c(X) = 0$). Prin urmare acțiunea σ_0 se prelungește în mod unic la o acțiune

$$\sigma : B \times X \rightarrow X.$$

Ținînd cont de definiția lui B , acțiunea lui B pe X se explicitează în felul următor : dacă $b \in B$ și $x \in F'_c \subset X$ (cu $c \in P^1 - S$), atunci $b \cdot x = y$, unde y este unicul punct al lui F'_c astfel încît

$$f^*O_B(b - b_0) \otimes O_{F'_c}(x) = O_{F'_c}(y),$$

de unde obținem, aplicînd norma $N_{F'_c/B}$ ambilor membri :

$$O_B(nb - nb_0 + f(x)) \cong O_B(f(y)),$$

unde $n = \deg(f_c) = (F_b \cdot F'_c)$. Rezultă atunci diagramele comutative

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{b} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ B & \xrightarrow{n_b} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B \times X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ 1_B \times f \downarrow & & \downarrow f \\ B \times B & \xrightarrow{\quad} & B \\ (b, b') \mapsto & & nb + b' \end{array}$$

Fie acum $B_0 = F_{b_0}$ și $A_n = \text{Ker } (n_B : B \rightarrow B)$, cu n_B omomorfismul multiplicare cu n pe B și A_n considerată ca subschemă în grupuri a lui B (dacă $\text{car}(k) = 0$, atunci A_n este subgrup finit pur

și simplu). Din (*) rezultă că acțiunea lui A_n pe X păstrează fibrele lui f , și, în particular, A_n acționează pe B_0 . Notăm această acțiune prin

$\alpha: A_n \rightarrow \text{Aut}(B_0) =$ schema în grupuri a automorfismelor lui B_0 .

Atunci prin restricție acțiunea σ a lui B pune în evidență morfismul

$$\tau: B \times B_0 \rightarrow X$$

care face (ținând cont de (*)) diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccc} B \times B_0 & \xrightarrow{\tau} & X \\ & \searrow \pi_B \cdot \text{pr}_1 \quad \swarrow f & \\ & B & \end{array}$$

Acum observăm că $\tau(b, x) = \tau(b', x') \Leftrightarrow \sigma(b - b', x) = x' \Leftrightarrow b - b' \in A_n$ și $\alpha(b - b')(x) = x'$. (Pentru prima echivalență se procedează în felul următor. „ \Rightarrow ”: $\sigma(b - b', x) = \sigma(-b', \sigma(b, x)) = \sigma(-b', \tau(b, x)) = \sigma(-b', \tau(b', x')) = \sigma(-b', \sigma(b', x')) = \sigma(b' - b', x') = \sigma(0, x') = x'$. „ \Leftarrow ”: $\tau(b', x') = \sigma(b', x') = \sigma(b', \sigma(b - b', x)) = \sigma(b' + b - b', x) = \sigma(b, x) = \tau(b, x)$.)

Rezultă atunci că X este izomorfă cu cîtul lui $B \times B_0$ prin A_n via acțiunea

$$a \cdot (b, b_0) = (b + a, \alpha(a)(b_0)), \quad a \in A_n, \quad b \in B, \quad b_0 \in B_0$$

Înlocuind pe B cu (curba eliptică) $B/\text{Ker}(\alpha)$, am demonstrat:

(10.25) **TEOREMĂ.** *Fiecare suprafață hipereliptică X are forma $X = B_1 \times B_0/A$, unde B_0 și B_1 sînt curbe eliptice, A — subschemă în grupuri finită a lui B_1 ce acționează pe produsul $B_1 \times B_0$ prin formula $a(b_1, b_0) = (b_1 + a, \alpha(a)(b_0))$, cu $a \in A$, $b_1 \in B_1$, $b_0 \in B_0$ și*

$\alpha: A \rightarrow \text{Aut}(B_0)$ omomorfism injectiv convenabil. În plus, cele

două fibrări eliptice ale lui X sînt date de: $f: B_1 \times B_0/A \rightarrow B_1/A = B$ (curbă eliptică) și $g: B_1 \times B_0/A \rightarrow B_0/\alpha(A) \cong P^1$.

(10.26) Ne propunem acum ca, folosind teorema (10.25) și structura destul de simplă pe care o are grupul automorfismelor $G = \text{Aut}(B_0)$ al unei curbe eliptice B_0 peste un corp k de caracte-



ristică diferită de 2 și 3, să enumerăm toate cazurile posibile pentru suprafețele hipereliptice.

Fie H subgrupul tuturor translațiilor curbei eliptice B_0 (H este subgrup în G) ce este izomorf cu grupul subiacent curbei B_0 prin aplicația $t_b \leftrightarrow b \in B_0$, și $F = \text{Aut}(B_0, 0)$ subgrupul lui G format din toate automorfismele lui B_0 ce lasă elementul $0 \in B_0$ pe loc. Un rezultat elementar de rigiditate pentru varietăți abeliene (vezi Mumford [2], § 4, sau Safarevici [1], pag. 221) are drept consecință imediată faptul că orice $\sigma \in F$ este omomorfism de grupuri, adică pentru orice $b, b' \in B_0$ are loc $\sigma(b + b') = \sigma(b) + \sigma(b')$. De aici rezultă relația $\sigma \circ t_b = t_{\sigma(b)} \circ \sigma$ pentru orice $b \in B_0$ și orice $\sigma \in F$. De asemenea, pentru orice $u \in G$ are loc relația $u = t_{u(0)} \circ \sigma$ cu $\sigma \in F$. De aici rezultă că subgrupul generat de $H \cup F$ coincide cu G , că H este divizor normal în G și (fapt evident) $H \cap G = \{1_{B_0}\}$. Altfel spus, G coincide cu produsul semidirect $H * F$ al subgrupului normal H cu subgrupul F , sau încă, $\text{Aut}(B_0)$ coincide cu produsul semidirect al grupului B_0 (izomorf cu H) cu grupul $\text{Aut}(B_0, 0)$.

Dacă B_0 este o curbă eliptică, notăm prin $j(B_0)$ j -invariantul curbei B_0 (vezi Hartshorne [1] sau Tate [1]). Atunci (*loc. cit.*) $\text{Aut}(B_0) = \{1_E, -1_E\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dacă $j(B_0) \neq 0, 12^3$, $\text{Aut}(B_0, 0) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dacă $j(B_0) = 12^3$, și $\text{Aut}(B_0, 0) \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ dacă $j(B_0) = 0$ (în toate cazurile am presupus $\text{car}(k) \neq 2, 3$).

Ținând cont că subgrupul H este izomorf cu B_0 , avem $\text{Aut}(B_0) = B_0 * \text{Aut}(B_0, 0)$ (produs semidirect). Atunci, în notațiile teoremei (10.25), nu putem avea $\alpha(A) \subset B_0$. Într-adevăr, dacă $\alpha(A) \subset B_0$, atunci cîtul $B_0/\alpha(A)$ ar fi curbă eliptică, ceea ce contrazice faptul că $B_0/\alpha(A) \cong P^1$. Fie atunci a un element al lui A astfel încît imaginea lui $\alpha(a)$ în $\text{Aut}(B_0)/B_0$ să genereze imaginea subgrupului $\alpha(A)$ în $\text{Aut}(B_0)/B_0 \cong \text{Aut}(B_0, 0)$ (după cele spuse mai sus, acest ultim grup este ciclic de ordin 2, 4 sau 6). Atunci $\alpha(a)$ este un automorfism al lui B_0 ce posedă un punct fix. Într-adevăr, avem $\alpha(a) = \sigma \circ t_b$ cu $\sigma \in \text{Aut}(B_0, 0) - \{1_{B_0}\}$ și $b \in B_0$. A găsi un punct fix pentru $\alpha(a)$ revine la a găsi un $z \in B_0$ astfel încît $\sigma(z) + \sigma(b) = z$. Însă deoarece $\sigma \neq 1_{B_0}$, endomorfismul $\sigma - 1_{B_0}$ al lui B_0 este surjectiv, și deci $-\sigma(b)$ are o preimagine $z \in B_0$ prin $\sigma - 1_{B_0}$.

Înlocuind originea cu un astfel de punct fix al lui $\alpha(a)$, deducem imediat că $\alpha(A)$ este un produs direct de forma

$$\alpha(A) \cong A_0 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$$

cu A_0 subschemă în grupuri a lui B_0 (A_0 finită) și n putînd lua una din valorile 2, 3, 4 sau 6. Deoarece A_0 și $\alpha(a)$ comută și

$\alpha(a) \in \text{Aut}(B_0, 0)$, avem $A_0 \subset U = \{b \in B_0 \mid \alpha(a)(b) = b\}$. Ținând cont de Tate [1], mulțimea U poate fi explicitată și rezultă că avem următoarele posibilități (car(k) $\neq 2, 3$):

a) $n = 2$ și atunci $U = \text{Ker}(2_{B_0}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) $n = 3$ și atunci $U = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) $n = 4$ și atunci $U = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

d) $n = 6$ și atunci $U = \{0\}$.

Ținând cont de toate aceste observații rezultă că avem următoarele posibilități de existență a suprafețelor hipereliptice în caracteristică diferită de 2 și 3:

(10.27) *Listă.* (Bagnera — DeFranchis)

$a_1)$ $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ și cu acțiunea $a(b_1, b_0) = (b_1 + a, -b_0)$.

$a_2)$ $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ cu a și g generatori ai lui $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ astfel încât $\alpha(a) \in \text{Aut}(B_0, 0)$ este automorfismul $b \mapsto -b$ al lui B_0 , iar $\alpha(g) \in B_0$ corespunde translației t_c a lui B_0 . În acest caz acțiunea este:

$$a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, -b_0) \text{ și } g \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + g, b_0 + c)$$

$b_1)$ $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $\alpha(a) = \omega \in \text{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 3. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 0$ și acțiunea este dată de $a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, \omega(b_0))$.

$b_2)$ $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ cu a și g generatori ai lui $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ astfel încât $\alpha(a) = \omega \in \text{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 3, iar $\alpha(g) \in B_0$ corespunde translației t_c a lui B_0 . Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 0$ și acțiunea este dată de:

$$a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, \omega(b_0)) \text{ și } g \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + g, b_0 + c).$$

În această situație mai avem $\omega(c) = c$ și ordinul lui $c = 3$.

$c_1)$ $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ cu $\alpha(a) = i \in \text{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 4. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 12^3$ și acțiunea este $a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, i(b_0))$.

$c_2)$ $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $0 \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ și g generator al lui $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times 0$, astfel încât $\alpha(a) = i \in \text{Aut}(B_0, 0)$ automorfism de ordin 4 și $\alpha(g) \in B_0$ corespunde translației t_c a lui B_0 . Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 12^3$ și acțiunea este dată de

$$a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, i(b_0)) \text{ și } g \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + g, b_0 + c).$$

În această situație mai avem $i(c) = c$ și ordinul lui $c = 2$.

d) $B_1 \times B_0/(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ cu a generator al lui $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\alpha(a) = -\omega \in \text{Aut}(B_0, 0)$ cu ω automorfism de ordin 3, iar acțiunea este $a \cdot (b_1, b_0) = (b_1 + a, -\omega(b_0))$. Acest caz apare numai dacă $j(B_0) = 0$.

Este ușor de văzut că alte posibilități nu mai există. De exemplu cazul $n = 2$ și $A_0 = \text{Ker}(2_{B_0})$ este imposibil căci $A \subset B$ și $A_0 \subset B_0$.

(10.28) *Referințe bibliografice.* Teoremele (10.2), (10.3), (10.9), (10.19), (10.25) și lista Bagnera-DeFranchis sînt prezentate după Bombieri-Mumford [1]. Proprietățile elementare ale suprafețelor Enriques ((10.11), (10.12), (10.13), (10.14) și (10.15)) sînt luate din Bombieri-Mumford [2], iar exemplul (10.16) din Beauville [1]. Demonstrația teoremei (10.17) reprezintă o adaptare după capitolul X din Șafarevici și al. [1]. Teorema (10.21) împreună cu consecința sa (10.22) apare în mai multe variante în Șafarevici [2], Șafarevici și al. [1], sau Beauville [1].

§ 11.

SUPRAFEȚE RIGLATE
CRITERIUL NOETHER-TSEN

(11.1) DEFINIȚIE. Vom spune că o suprafață X este *riglată* dacă există o curbă B nesingulară și proiectivă astfel încât X să fie birațional izomorfă cu $P^1 \times B$.

(11.2) DEFINIȚIE. Fie X o suprafață și B o curbă (proiectivă și nesingulară). Se numește *fascicul de curbe pe X de bază B* orice aplicație rațională dominantă $\pi: X \rightarrow B$ cu proprietatea că $k(B)$ este algebric închis în $k(X)$.

Rezultă atunci că π este definită în complementara unui număr finit de puncte $x_1, \dots, x_n (n \geq 0)$. Dacă aceste puncte sînt fundamentale pentru π (adică π nu poate fi definită în aceste puncte), atunci x_1, \dots, x_n mai poartă numele de punctele bază ale fascicului π . Dacă $y \in B$ este un punct arbitrar, atunci $\pi^{-1}(y)$ este o curbă pe X , iar $\{\pi^{-1}(y) \mid y \in B\}$ se numește familia curbelor fascicului π . Dacă $y = \eta$ este punctul generic al lui B , atunci $\pi^{-1}(\eta)$ se numește curba generică a fascicului π (sau fibra generică a lui π).

(11.3) TEOREMĂ. (Noether-Tsen). Fie X o suprafață pe care s-a dat un fascicul $\pi: X \rightarrow B$ de curbe de bază curba B , a cărei fibră generică este de gen aritmetic zero. Atunci X este birațional izomorfă cu $P^1 \times B$. În particular, X este o suprafață riglată.

Demonstrația acestei teoreme utilizează mai multe fapte ce prezintă interes și în sine. Mai întîi o definiție.

(11.4) DEFINIȚIE. Vom spune că un corp comutativ K are proprietatea $C_i (i \geq 0)$ dacă pentru orice $n \geq 1$ și $d \geq 1$ astfel încît $d^i < n + 1$ și orice hipersuprafață H din $P^n(K)$ de grad d , există un punct al lui H rațional peste K . Altfel spus, orice polinom omogen cu coeficienți în K de grad d în $n + 1$ variabile are o soluție netrivială în K^{n+1} dacă $d^i < n + 1$ (cu $d \geq 1$ și $n \geq 1$).

(11.5) Observații. a) Corpul K are proprietatea C_0 dacă și numai dacă K este algebric închis.

b) Dacă corpul K are proprietatea O_i , atunci K are și proprietatea O_j pentru orice $j \geq i$.

c) Orice corp finit are proprietatea O_1 (teorema Chevalley-Warning, vezi J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Paris 1970, I, § 2).

d) Corpul numerelor reale nu are proprietatea O_i pentru orice $i \geq 0$.

(11.6) TEOREMĂ. a) Fie k un corp algebric închis. Atunci corpul de fracții $k(T)$ al inelului de polinoame $k[T]$ în nedeterminata T are proprietatea O_1 .

b) Dacă corpul K are proprietatea O_1 , atunci orice extindere algebrică $E \supset K$ are de asemenea proprietatea O_1 .

Demonstrația teoremei (11.6) necesită două leme.

(11.6.1) LEMĂ. Fie K un corp nealgebric închis. Există atunci un număr natural n și un polinom omogen de grad n în n variabile care nu are nici o soluție netrivială în K .

Demonstrația lemei (11.6.1). Deoarece K nu este algebric închis există o extindere finită $L \supset K$ de grad $n > 1$. Fie $N : L \rightarrow K$ funcția normă. Ea are proprietățile: $N(xy) = N(x)N(y)$ pentru orice $x, y \in L$ și dacă $x \in L - \{0\}$, atunci $N(x) \neq 0$. Fie e_1, \dots, e_n o bază vectorială a lui L peste K . Vom construi un polinom omogen $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ de grad n astfel încât pentru orice $x \in L$ să avem $N(x) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, unde $x = \sum \xi_i e_i$ cu $\xi_i \in K$. Pentru aceasta considerăm elementele $\epsilon_{ij}^r \in K$ astfel încât

$$e_i e_j = \sum_{r=1}^n \epsilon_{ij}^r e_r$$

și punem atunci $P(X_1, \dots, X_n) = \det \|a_{ij}\|$, unde $a_{ij} = \sum_{r=1}^n X_r \epsilon_{ij}^r$. Pentru a vedea că pentru orice $x \in L$ avem $N(x) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, observăm că $x \cdot e_i = \left(\sum_{r=1}^n \xi_r e_r \right) \cdot e_i = \sum_{r=1}^n \xi_r (e_r e_i) = \sum_{r=1}^n \xi_r \sum_{s=1}^n \epsilon_{ri}^s e_s = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{r=1}^n \xi_r \epsilon_{ri}^s \right) e_s$, de unde

$$N(x) = \det \left\| \sum_{r=1}^n \xi_r \epsilon_{ri}^s \right\| = \det \|a_{is}(\xi)\| = P(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Datorită faptului că $P(\xi_1, \dots, \xi_n) = N(x) \neq 0$ pentru orice $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n - \{0\}$ și $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, lema (11.6.1) este demonstrată.

(11.6.2) LEMĂ. Fie K un corp cu proprietatea C_1 și f_1, \dots, f_r r forme omogene peste K ($r \geq 1$) în n variabile și de grad d . Dacă $n > rd$, atunci aceste forme posedă o soluție comună netrivială în K^n .

Demonstrația lemei (11.6.2). Dacă K este algebric închis, totul este bine cunoscut. Presupunem deci K nealgebric închis. Fie $\Phi(X_1, \dots, X_e)$ o formă omogenă de grad $e \geq r$ care nu are în K decît soluția trivială (cf. (11.6.1)). Putem alege de fapt o formă de grad oricît de mare dorim (care să nu aibă nici-o soluție netrivială în K), deoarece dacă $\Psi(X_1, \dots, X_e)$ este o astfel de formă, atunci $\Psi(X_1, \dots, X_e)^n$ de asemenea nu are nici-o soluție netrivială în K pentru orice $n \geq 1$. Presupunem că $(n - dr) [e/r] > dr$, $[e/r]$ partea întreagă a numărului e/r . Considerăm forma omogenă

$$\Phi'(X_{11}, \dots, X_{n1}; \dots; X_{1[e/r]}, \dots, X_{n[e/r]})$$

obținută din Φ în felul următor:

— se substituie mai întîi în Φ variabilele X_1, \dots, X_r prin formele $f_1(X_{11}, \dots, X_{n1}), \dots, f_r(X_{11}, \dots, X_{n1})$,

— apoi se substituie variabilele X_{r+1}, \dots, X_{2r} prin $f_1(X_{12}, \dots, X_{n2}), \dots, f_r(X_{12}, \dots, X_{n2})$, ș.a.m.d.

— dacă mai rămîn variabile după ce s-au făcut toate substituțiile de mai sus de $[e/r]$ -ori, se substituie aceste variabile prin zero.

Prin urmare:

$$\begin{aligned} & \Phi'(X_{11}, \dots, X_{n1}; \dots; X_{1[e/r]}, \dots, X_{n[e/r]}) = \\ & = \Phi(f_1(X_{11}, \dots, X_{n1}), \dots, f_r(X_{11}, \dots, X_{n1}); \dots; f_1(X_{1[e/r]}, \dots, \\ & \dots, X_{n[e/r]}) \dots f_r(X_{1[e/r]}, \dots, X_{n[e/r]}); 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

Rezultă că Φ' este o formă omogenă de grad de în $n [e/r]$ variabile. Avem $n [e/r] > de$. Într-adevăr, $dr ([e/r] + 1) \geq de$, iar pe de altă parte $n [e/r] \geq dr ([e/r] + 1)$ prin ipoteză. Conchidem că Φ' are o soluție netrivială în K . Însă Φ avînd în K numai soluția trivială, deducem că f_1, \dots, f_r au o soluție netrivială în K . Q.E.D.

Demonstrația teoremei (11.6). a) Fie $f(X_1, \dots, X_n)$ un polinom omogen cu coeficienți în $k(T)$ în variabilele X_1, \dots, X_n și de grad $d < n$. Evident, putem presupune că toți coeficienții lui f sînt din $k[T]$. Vom găsi atunci o soluție netrivială chiar în $k[T]$ (mai exact, în $k[T]^n$). Fie

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i_1 + \dots + i_n = d} c_{i_1, \dots, i_n} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}, \quad c_{i_1, \dots, i_n} \in k[T].$$

închis k . Din (*) deducem $ds + r + 1 < ns + n$, de unde rezultă că aceste forme au o soluție netrivială în k . Conchidem că f are o soluție netrivială în $k[T]$.

b) Este suficient să demonstrăm afirmația punctului b) în cazul când extinderea E/K este finită, deoarece dacă $f \in E[X_1, \dots, X_n]$ este o formă omogenă de grad $d < n$, există o extindere finită E_1/K astfel încât $f \in E_1[X_1, \dots, X_n]$, de unde deducem că f are o soluție netrivială în E_1 .

Fie deci $m = [E : K]$ și $f \in E[X_1, \dots, X_n]$ ca mai sus. Alegem o bază vectorială e_1, \dots, e_m a lui E peste K . Introducem variabilele :

$$\begin{array}{c} Y_{11}, \dots, Y_{1m} \\ \dots \dots \dots \\ Y_{n1}, \dots, Y_{nm} \end{array}$$

și considerăm forma omogenă

$$\Phi(Y_{11}, \dots, Y_{1m}; \dots; Y_{n1}, \dots, Y_{nm}) = f\left(\sum_{i=1}^m e_i Y_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^m e_i Y_{ni}\right).$$

$$\Phi \text{ se scrie } \Phi(Y) = \sum_{i=1}^m e_i \Phi_i(Y), \text{ cu } \Phi_i(Y) \in K[Y_{11}, \dots, Y_{nm}]$$

forme de grad d . Deoarece $md < mn$, lema (11.6.2) implică faptul că formele $\Phi_1(Y), \dots, \Phi_m(Y)$ au o soluție netrivială în K , să zicem

$(\xi_{11}, \dots, \xi_{mn}) \in K^{nm}$. Atunci (η_1, \dots, η_n) cu $\eta_j = \sum_{i=1}^m e_i \xi_{ji}$ reprezintă

o soluție netrivială în E a lui f . Q.E.D.

(11.7) LEMĂ. Fie K un corp comutativ și fie X o curbă algebrică proprie peste K astfel încât $\bar{X} = X \otimes_K \bar{K}$ este \bar{K} -izomorfă cu dreapta proiectivă $P^1(\bar{K})$, unde prin \bar{K} am notat o închidere algebrică a lui K . Atunci X este K -izomorfă cu $\text{Proj}(K[X_0, X_1, X_2]/(Q))$, unde $Q \in K[X_0, X_1, X_2]$ este o formă pătratică nedegenerată.

Demonstrație. Din ipoteze rezultă că X este geometric integră și deci, ținând cont de EGA IV (4.5.9) și (4.6.1), corpul funcțiilor raționale $K(X)$ al lui X este o extindere regulată a lui K . Atunci $\bar{K}(\bar{X}) \cong K(X) \otimes_K \bar{K}$. Cum X este și geometric netedă, rezultă că fasciculul $\Omega_{\bar{X}} = \Omega_{\bar{X}/K}^1$ se obține din Ω_X prin extinderea scalarilor, adică are loc formula $\Omega_{\bar{X}} \cong \Omega_X \otimes_K \bar{K}$. Trecînd la duale obținem izomorfismul canonic :

$$(**) \quad (\Omega_{\bar{X}})^\vee \cong (\Omega_X)^\vee \otimes_K \bar{K}.$$

Însă $(\Omega_{\bar{X}})^\vee = \mathcal{O}_{P^1(\bar{K})}(2)$ și deci $\dim_{\bar{K}} H^0(\bar{X}, (\Omega_{\bar{X}})^\vee) = 3$. Dacă $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ este o bază a lui $H^0(\bar{X}, (\Omega_{\bar{X}})^\vee)$ peste \bar{K} , atunci aplicația rațională $x \mapsto (\sigma_0(x), \sigma_1(x), \sigma_2(x)) : \bar{X} \rightarrow P^2(\bar{K})$ este peste tot definită și este imersie închisă deoarece $\mathcal{O}(2)$ este foarte amplu pe \bar{X} . Însă izomorfismul (**) arată că se poate obține o bază a lui $H^0(\bar{X}, (\Omega_{\bar{X}})^\vee)$ pornind de la o bază arbitrară $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ a lui $H^0(X, (\Omega_X)^\vee)$ peste K . În acest caz imersia de mai sus este chiar o K -imersie (mai exact spus, provine dintr-o K -imersie). Deci X este K -izomorfă cu o subschemă închisă a lui $P^2(K)$ de forma $\text{Proj}(K[X_0, X_1, X_2]/(Q))$, cu Q formă pătratică nedegenerată în variabilele X_0, X_1 și X_2 (nedegenerarea lui Q provine din faptul că Q este astfel peste \bar{K}). Q.E.D.

(11.8) LEMĂ. În ipotezele lui (11.7), presupunem în plus că X posedă un punct rațional peste K . Atunci X este K -izomorfă cu $P^1(K)$.

Demonstrație. Fie $x \in X$ un punct rațional peste K și I fasciculul coerent de ideale ce definește subschema închisă și integră $\{x\} \hookrightarrow X$ a lui X . Atunci $\bar{I}^{-1} = I^{-1} \otimes_K \bar{K}$ este un $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -modul inversibil de grad 1, deci ținând cont că $\bar{X} = P^1(\bar{K})$, avem $\dim_{\bar{K}} H^0(\bar{X}, \bar{I}^{-1}) = 2$. Cum $H^0(\bar{X}, \bar{I}^{-1}) \cong H^0(X, I^{-1}) \otimes_K \bar{K}$, rezultă că există o funcție rațională neconstantă $f \in K(X)$ care are în x un pol simplu. Atunci $f : X \rightarrow P^1(K)$ este în mod necesar un K -izomorfism. Q.E.D.

(11.9) COROLAR. Fie K un corp cu proprietatea C_1 și fie X o curbă geometrică integră, proprie peste K și de gen aritmetic zero. Atunci X este K -izomorfă cu $P^1(K)$.

Demonstrație. Avem $p_a(X) = 1 - \chi(\mathcal{O}_X) = 1 - \dim_K H^0(\mathcal{O}_X) + \dim_K H^1(\mathcal{O}_X) = 1 - \dim_{\bar{K}} H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}) + \dim_{\bar{K}} H^1(\mathcal{O}_{\bar{X}})$. Cum \bar{X} este geometrică integră, $\dim_{\bar{K}} H^0(\mathcal{O}_{\bar{X}}) = 1$, de unde $H^1(\mathcal{O}_{\bar{X}}) = 0$, și deci $\bar{X} = P^1(\bar{K})$. După (11.7), X este K -izomorfă cu o conică nedegenerată $Q(X_0, X_1, X_2) = 0$ în $P^2(K)$. Cum K are proprietatea C_1 , această conică are cel puțin un punct rațional peste K , și demonstrația se încheie ținând cont de (11.8). Q.E.D.

Demonstrația teoremei (11.3). Notînd prin η punctul generic al lui B , corpul $k(\eta) = k(B)$ are proprietatea C_1 în baza teoremei (11.6). Prin ipoteză, curba $X_\eta = \pi^{-1}(\eta)$ este de gen aritmetic zero (peste $k(\eta)$). Fie $\varphi : X' \rightarrow X$ o compunere de transformări pătratice astfel încît $\pi \circ \varphi$ să devină morfism. Deoarece $k(B)$ este algebric închis în $k(X') = k(X)$ și deoarece fibra generică rămîne neschimbată la aceste transformări pătratice, deducem, ținînd cont de (7.3), că X_η este geometrică integră. După (11.9) există atunci un $k(\eta)$ -izomorfism între X_η și $P^1(k(\eta))$, și deci $k(\eta)(t) = k(X_\eta)$, cu t o variabilă peste $k(\eta)$. Cum $k(X_\eta) = k(X)$, avem deci $k(X) = k(B)(t)$ cu t variabilă peste $k(B)$, altfel spus, X este birațional izomorfă cu $P^1 \times B$. Q.E.D.

(11.10) TEOREMĂ. Fie $\pi: X \rightarrow B$ un morfism surjectiv de la suprafața X la curba (proiectivă și nesingulară) B astfel încât să existe un punct închis $b \in B$ cu proprietatea că $\pi^{-1}(b) = P^1$. Atunci există o secțiune $\sigma: B \rightarrow X$ a lui π (adică un morfism σ cu proprietatea $\pi \circ \sigma = 1_B$), precum și un deschis $U \subseteq B$ ce conține pe b și un izomorfism $f: \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} P^1 \times U$ astfel încât diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow[\sim]{f} & P^1 \times U \\ & \searrow \pi|_{\pi^{-1}(U)} = \pi' & \swarrow p_2 \\ & U & \end{array}$$

să fie comutativă, unde p_2 este proiecția lui $P^1 \times U$ pe U .

Demonstrație. Deoarece B este o curbă nesingulară și $\pi_*(O_X)$ este un O_B -modul coerent fără torsiune, $\pi_*(O_X)$ este local liber de rang finit. Cum π este plat și $H^1(\pi^{-1}(b), O_{\pi^{-1}(b)}) = 0$ rezultă că într-o vecinătate V a lui b funcția $b' \mapsto \dim H^1(\pi^{-1}(b'), O_{\pi^{-1}(b')})$ este identic nulă și prin urmare omomorfismul natural

$$\pi_*(O_X) \otimes k(b') \rightarrow H^0(\pi^{-1}(b'), O_{\pi^{-1}(b')})$$

este un izomorfism pentru orice $b' \in V$. Deoarece $\pi^{-1}(b) \cong P^1$, $\dim H^0(\pi^{-1}(b), O_{\pi^{-1}(b)}) = 1$ și deci $\pi_*(O_X)$ este local liber de rang 1. De aici rezultă $\pi_*(O_X) = O_B$, și deci $k(B)$ este algebric închis în $k(X)$. Din (7.3) rezultă că există un deschis U_1 al lui B ce conține punctul b astfel încât pentru orice $b' \in U_1$ fibra $F_{b'} = \pi^{-1}(b')$ să fie integră. Cum $F_b = P^1$ și genul aritmetic al lui $F_{b'}$, nu depinde de b' , fibra generică F_η are genul aritmetic zero, iar pentru orice punct închis $b' \in U_1$, $F_{b'} \cong P^1$. Din teorema (11.3) și demonstrația ei deducem că $F_\eta \cong P^1(k(\eta)) = P^1(k(B))$, și deci F_η are un punct rațional peste $k(B) = O_{B,\eta}$. Altfel spus, există un $k(B)$ -morfism $\sigma': \text{Spec}(k(B)) \rightarrow F_\eta$, și deci un morfism $\sigma: \text{Spec}(O_{B,\eta}) \rightarrow X$ a cărui compunere cu π este exact incluziunea canonică $\text{Spec}(O_{B,\eta}) \hookrightarrow B$. Aplicînd EGA I (6.5.1) deducem existența unei secțiuni raționale $\sigma: B \rightarrow X$ a lui π , care este în mod necesar regulată deoarece B este curbă nesingulară, iar X varietate proiectivă.

Notînd $D = \sigma(B)$, avem $(D \cdot F_{b'}) = 1$ pentru orice $b' \in B$. Fie $X' = \pi^{-1}(U_1)$ și $\pi' = \sigma|_{X'}$. Cum toate fibrele lui π' sînt drepte

proiective și pentru orice $b' \in U_1$ avem $O_{X'}(D) \otimes O_{F_{b'}} \cong O_{F_{b'}}(1)$, rezultă

$$\dim_{k(b')} H^0(O_{X'}(D) \otimes k(b')) = 2 \text{ pentru orice } b' \in U_1,$$

de unde deducem (ținând cont de teoremele de schimbare a bazei) că $E = \pi'_* O_{X'}(D)$ este un O_{U_1} -modul local liber de rang 2 și că omomorfismul canonic

$$\pi'_* O_{X'}(D) \otimes k(b') \rightarrow H^0(O_{X'}(D) \otimes O_{F_{b'}})$$

este un izomorfism pentru orice $b' \in U_1$. De aici rezultă imediat că omomorfismul canonic $\pi'^* \pi'_* O_{X'}(D) = \pi'^*(E) \rightarrow O_{X'}(D)$ este surjectiv. Din proprietatea de universalitate a lui $P(E)$ (fibratul proiectiv asociat lui E) rezultă atunci că există un unic U_1 -morfism $u: X' \rightarrow P(E)$ astfel încât $u^* O_{P(E)}(1) \cong O_{X'}(D)$. Din definiția lui E deducem imediat că u este izomorfism (deoarece pentru fiecare $b' \in U_1$ morfismul $u_{b'}: F_{b'} \rightarrow P^1(k(b'))$ dedus din u este evident izomorfism). Q.E.D.

(11.11) COROLAR. În ipotezele teoremei (11.10), presupunem în plus că morfismul π are toate fibrele închise izomorfe cu P^1 . Atunci există un O_B -modul E local liber de rang 2 și un B -izomorfism $u: X \xrightarrow{\sim} P(E)$. În plus, dacă E și E' sînt două O_B -module local libere de rang 2, atunci există un B -izomorfism $v: P(E) \xrightarrow{\sim} P(E')$ dacă și numai dacă există un O_B -modul inversibil L astfel încît $E' \cong E \otimes L$.

Demonstrație. Exceptînd ultima afirmație, totul este clar din demonstrația teoremei (11.10). Dacă există L ca în enunț, atunci $P(E) \cong P(E')$ după EGA II (4.1.4). Reciproc, presupunem că există un B -izomorfism $v: P(E) \xrightarrow{\sim} P(E')$. Atunci, ținînd cont de propoziția (11.12) de mai jos, $O_{P(E)}$ -modulul inversibil $v^* O_{P(E')}(1)$ se scrie în mod unic sub forma

$$v^* O_{P(E')}(1) \cong p^*(L) \otimes O_{P(E)}(s),$$

cu s număr întreg, $p: P(E) \rightarrow B$ (resp. $p': P(E') \rightarrow B$) proiecția canonică a lui $P(E)$ (resp. a lui $P(E')$), și L un O_B -modul inversibil. Utilizînd formula proiecției obținem:

$$(*) \quad p_* v^* O_{P(E')}(1) \cong L \otimes p_* O_{P(E)}(s).$$

Însă ținînd cont de calculul explicit al coomologiei unui fibrat proiectiv (EGA III (2.1.15)) avem $p_* v^* O_{P(E')}(1) \cong p'_* O_{P(E')}(1) \cong E'$ și



$p_* O_{P(E)}(s) = S^s(E)$ (unde $S^s(E) = 0$ dacă $s < 0$ și $S^s(E)$ este puterea simetrică de grad s dacă $s \geq 0$). Ținând cont de (*) rezultă $s = 1$ și deci $E' = L \otimes E$. Q.E.D.

(11.12) PROPOZIȚIE. Fie $f: (E) \rightarrow Z$ un fibrat proiectiv cu Z varietate algebrică arbitrară și E un O_Z -modul local liber de rang finit. Atunci $\text{Pic}(P(E)) \cong \mathbb{Z}[O_{P(E)}(1)] \oplus f^*(\text{Pic}(Z))$, unde f^* este omomorfismul (injectiv) indus de f la grupurile Picard și $[O_{P(E)}(1)]$ este clasa lui $O_{P(E)}(1)$ în $\text{Pic}(P(E))$.

Propoziția (11.12) este bine cunoscută și se deduce fără nici un fel de dificultate din teoremele de schimbare a bazei.

(11.13) DEFINIȚIE. Se numește *suprafață geometric riglată* o suprafață X împreună cu un morfism $f: X \rightarrow B$ pe o curbă nesingulară B astfel încît pentru orice punct închis $b \in B$, fibra $F_b = f^{-1}(b)$ este izomorfă cu P^1 .

Din (11.10) și (11.11) rezultă că dacă $f: X \rightarrow B$ este o suprafață geometric riglată, atunci există un O_B -modul local liber de rang 2 și un B -izomorfism $u: X \xrightarrow{\sim} P(E)$. De asemenea, există o secțiune $\sigma: B \rightarrow X$ a lui f .

(11.14) COROLAR. Fie $f: X \rightarrow B$ o suprafață geometric riglată și $\sigma: B \rightarrow X$ o secțiune a lui B . Dacă notăm prin $C = \sigma(B)$, prin F o fibră închisă F_b a lui f , atunci $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}[O_X(C)] \oplus f^*(\text{Pic}(B))$ și $\text{Num}(X) \cong \mathbb{Z}\{O_X(C)\} \oplus \mathbb{Z}\{O_X(F)\}$, unde $[L]$ (resp. $\{L\}$) reprezintă clasa în $\text{Pic}(X)$ (resp. în $\text{Num}(X)$) a O_X -modulului inversibil L .

Demonstrație. Prima afirmație rezultă imediat din (11.12) observînd că dacă $X = P(E)$, cu E O_B -modul local liber de rang 2, atunci $O_X(C) \cong O_{P(E)}(1) \otimes f^*(L') = O_{P(E \oplus L')}(1)$, cu L' O_B -modul inversibil. A doua afirmație rezultă din observația că $\text{Num}(B) = \mathbb{Z}\{b\}$, unde $b \in B$ este un punct închis arbitrar, de unde $f^*(\text{Num}(B)) \cong \mathbb{Z}\{O_X(F_b)\}$. Q.E.D.

(11.15) PROPOZIȚIE. Dacă X este o suprafață riglată, atunci $c(X) = -1$, adică $p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$. În particular, $p_g = 0$.

Demonstrație. Deoarece p_n ($n \geq 1$) sînt invarianți biraționali și X este birațional izomorfă cu $P^1 \times B$ (cu B curbă proiectivă și nesingulară), propoziția (11.15) rezultă atunci din (5.8) ii). Q.E.D.

(11.16) PROPOZIȚIE. Fie E un O_B -modul local liber de rang $r \geq 1$ pe curba nesingulară și proiectivă B . Există atunci un șir de subfascicule locale libere ale lui E , $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_r = E$, cu $\text{rang}(E_i) = i$ și $E_i/E_{i-1} = L_i$ inversibil pe B , $i = 1, \dots, r$.

Demonstrație. Folosind inducție după r , este suficient să determinăm un subfascicul inversibil L al lui E astfel încît E/L să fie local liber (evident de rang $r - 1$). Atunci $P = P(E)$ împreună cu proiecția sa $p: P \rightarrow B$ au proprietatea că există scufundarea uni-

versală $O_P(-1) \hookrightarrow p^*(E)$ astfel încît cîtul $E' = p^*(E)/O_P(-1)$ să fie local liber.

Fie atunci $s \in \Gamma(U, E)$ o secțiune nenulă deasupra unui deschis nevid convenabil $U \subseteq B$. Deoarece E este local liber, secțiunea s pune în evidență un morfism $i_s: V \rightarrow P$, cu $V \subseteq U$ deschis nevid convenabil, cu proprietatea că $p \circ i_s$ coincide cu incluziunea $V \hookrightarrow B$. Cum i_s este o secțiune rațională a lui p , B este curbă nesingulară și P este varietate proiectivă, i_s este chiar o secțiune regulată a lui p . În fine, din șirul exact de O_P -module local libere

$$0 \rightarrow O_P(-1) \rightarrow p^*(E) \rightarrow F \rightarrow 0$$

deducem șirul exact de O_B -module local libere

$$0 \rightarrow i_s^*(O_P(-1)) = L_s \rightarrow i_s^*p^*(E) = E \rightarrow i_s^*(F) \rightarrow 0. \quad \text{Q.E.D}$$

(11.17) DEFINIȚIE. În ipotezele și notațiile propoziției (11.16) șirul $0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_r = E$ cu proprietățile E_i local liber de rang i și $E_i/E_{i-1} = L_i$ inversibil pentru orice $i = 1, \dots, r$ se numește *scindare* a lui E . O astfel de scindare va fi notată mai simplu (L_1, \dots, L_r) .

Dacă E este un O_B -modul local liber de rang $r \geq 1$, atunci vom nota prin $\det(E) = \bigwedge^r(E)$ și prin $\deg(E) = \deg(\det(E))$. Este imediat de văzut că \deg este o funcție aditivă pe categoria O_B -modulilor local libere de rang finit (B fiind bineînțeles o curbă proiectivă și nesingulară), adică pentru orice șir exact de O_B -module local libere $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$, atunci $\deg(E) = \deg(E_1) + \deg(E_2)$.

Într-adevăr, dacă $r_i = \text{rang}(E_i)$, $i = 1, 2$, și $r = \text{rang}(E)$, avem $r = r_1 + r_2$, iar șirul exact de mai sus induce un izomorfism $\det(E) = \det(E_1) \otimes \det(E_2)$. Rezultă în particular că dacă (L_1, \dots, L_r) este o scindare a lui E , atunci $\deg(E) = \sum_{i=1}^r \deg(L_i)$.

Existența scindărilor are drept consecință imediată:

(11.18) COROLAR. (Riemann-Roch). Dacă E este un O_B -modul local liber de rang r pe curba proiectivă și nesingulară B , atunci

$$\chi(E) = \deg(E) + r(1 - g), \text{ cu } g = p_a(B).$$

Demonstrație. Procedăm prin inducție după r . Dacă $r = 1$ relația din enunț este tocmai teorema Riemann-Roch obișnuită pentru

module inversibile. Presupunem deci $r > 1$. Din (11.17) rezultă că există un șir exact

$$0 \rightarrow L \rightarrow E \rightarrow E' \rightarrow 0$$

de O_B -module local libere cu $\text{rang}(L) = 1$ (și deci $\text{rang}(E') = r - 1$). Folosind ipoteza de inducție avem succesiv :

$$\begin{aligned} \chi(E) &= \chi(L) + \chi(E') = \deg(L) + (1 - g) + \deg(E') + \\ &+ (r - 1)(1 - g) = \deg(E) + r(1 - g). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

(11.19) PROPOZIȚIE. Fie $f: X \rightarrow B$ o suprafață geometric ri-glată, cu $X = P(E)$, E O_B -modul local liber de rang 2 și f proiecția canonică a lui $P(E)$. Atunci :

- a) $q = p_a(B)$.
- b) $(L \cdot L) = \deg(E)$, unde $L = O_{P(E)}(1)$.
- c) $(K^2) = 8(1 - q)$ și $b_2 = 2$.

Demonstrație. Șirul spectral Leray

$$E_2^{pq} = H^p(B, R^q f_* O_X(n)) \Rightarrow H^{p+q}(X, O_X(n))$$

degenerează pentru orice $n \geq 0$, deoarece $X = P(E)$, f este proiecția canonică a lui $P(E)$ și se ține cont de EGA III (2.1.15). Deci

$$H^p(B, S^n(E)) = H^p(X, O_X(n)) \text{ pentru orice } p \geq 0 \text{ și } n \geq 0,$$

deoarece (loc. cit.) $f_* O_X(n) = S^n(E)$. Pentru $n = 0$ obținem afirmația a). În cazul cînd n este arbitrar ≥ 0 , obținem

$$(*) \quad \chi(X, O_X(n)) = \chi(B, S^n(E)).$$

Însă după (11.18) avem

$$(**) \quad \chi(B, S^n(E)) = \deg(S^n(E)) + \text{rang}(S^n(E))(1 - p_a(B)).$$

Cum $\text{rang}(E) = 2$, avem $\text{rang}(S^n(E)) = n + 1$. Pe de altă parte, fie (L_1, L_2) o scindare a lui E (o asemenea scindare există în baza propoziției (11.16)). Cum funcția \deg este aditivă avem :

$$\begin{aligned} \deg(S^n(E)) &= \deg(S^n(L_1 \oplus L_2)) = \\ &= \deg\left(\bigwedge^{n+1}\left(\bigoplus_{i=0}^n (L_1^i \otimes L_2^{n-i})\right)\right) = \deg\left(\bigotimes_{i=1}^n (L_1^i \otimes L_2^{n-i})\right) = \\ &= n(n+1)/2 \cdot \deg(L_1 \oplus L_2) = n(n+1)/2 \cdot \deg(E). \end{aligned}$$

Ținând cont de toate aceste observații și de (*) și (**), obținem :

$$\chi(X, O_X(n)) = n(n+1)/2 \cdot \deg(E) + (n+1)(1 - p_a(B)),$$

și de aici afirmația b) dacă ținem cont de (1.21).

Pentru a demonstra c) folosim formula bine cunoscută (și elementară) :

$$\omega_X \cong f^*(\omega_B \otimes \det(E)) \otimes O_X(-2),$$

de unde

$$\begin{aligned} (K^2) &= (\omega_X \cdot \omega_X) = (O_X(-2) \cdot O_X(-2)) + 2(O_X(-2) \cdot f^*(\omega_B \otimes \det(E))) = \\ &= 4(L \cdot L) - 4(L \cdot f^*(\omega_B \otimes \det(E))) = 4 \cdot \deg(E) - 4\deg(\omega_B \otimes \det(E)) = \\ &= -4 \deg(\omega_B) = 8(1 - p_a(B)) = 8(1 - q). \end{aligned}$$

În fine, deoarece $p_g = 0$ (cf. (11.15)) avem $\Delta = 0$ (cf. (5.1)) și deci formula lui Noether devine :

$$10 - 8q = (K^2) + b_2,$$

de unde ținând cont că $(K^2) = 8(1 - q)$, obținem $b_2 = 2$. Q.E.D.

(11.20) Fie Z o varietate algebrică completă și E_1 și E_2 două O_Z -module local libere de rang finit. Se numește extindere a lui E_2 prin E_1 orice șir exact de forma :

$$(E) \quad 0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\varphi} E' \xrightarrow{\psi} E_2 \rightarrow 0,$$

cu E local liber de rang finit (de altfel faptul că E este local liber de rang finit rezultă din ipotezele că E_1 și E_2 sînt local libere de rang finit). Dacă

$$(\mathbb{E}') \quad 0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{\varphi'} E' \xrightarrow{\psi'} E_2 \rightarrow 0$$

este o altă extindere a lui E_2 prin E_1 , vom spune că cele două extinderi sînt izomorfe dacă există un omomorfism $u: E \rightarrow E'$ de O_Z -module astfel încît diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E & \xrightarrow{\psi} & E_2 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow u & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\varphi'} & E' & \xrightarrow{\psi'} & E_2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

să fie comutativă. Extinderea (\mathbb{E}) se numește trivială dacă $E \cong E_1 \oplus E_2$, φ este injecția canonică $e_1 \rightarrow (e_1, 0)$, iar ψ este proiecția canonică $(e_1, e_2) \rightarrow e_2$.

(11.21) PROPOZIȚIE. Clasele de izomorfism de extinderi ale lui E_2 prin E_1 se află într-o corespondență bijectivă cu elementele grupului $H^1(Z, \mathcal{H}om(E_2, E_1)) = H^1(Z, \check{E}_2 \otimes E_1)$ astfel încît extinderea trivială a lui E_2 prin E_1 corespunde elementului zero al lui $H^1(Z, \check{E}_2 \otimes E_1)$.

Demonstrația este standard. Indicăm numai cum se asociază la o extindere

$$(\mathbb{E}) \quad 0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$$

un element din $H^1(Z, \mathcal{H}om(E_2, E_1))$. Din șirul exact de mai sus obținem șirul exact

$$0 \rightarrow \mathcal{H}om(E_2, E_1) \rightarrow \mathcal{H}om(E_2, E) \rightarrow \mathcal{H}om(E_2, E_2) \rightarrow 0,$$

de unde omomorfismul canonic indus la coomologie :

$$\delta: \text{Hom}(E_2, E_2) = H^0(Z, \mathcal{H}om(E_2, E_2)) \rightarrow H^1(Z, \mathcal{H}om(E_2, E_1)).$$

Atunci $\delta(1_{E_2}) \in H^1(Z, \mathcal{H}om(E_2, E_1))$ este tocmai elementul corespunzător lui (\mathbb{E}) în $H^1(Z, \mathcal{H}om(E_2, E_1))$.

(11.22) TEOREMĂ. Orice O_{P^1} -modul E local liber de rang 2 este izomorf cu $O_{P^1}(m) \oplus O_{P^1}(n)$ cu m și n numere întregi convenabile.

Demonstrație. Fie E local liber de rang 2 pe P^1 și L un O_{P^1} -modul inversibil oarecare. Atunci avem (exercițiu !):

$$\deg(E \otimes L) = \deg(E) + 2\deg(L),$$

de unde rezultă că alegînd pe L în felul următor :

$$L = \begin{cases} O_{P^1}(-d/2) & \text{dacă } d = \deg(E) \text{ este par, și} \\ O_{P^1}(-(d-1)/2) & \text{dacă } d \text{ este impar,} \end{cases}$$

avem, dacă notăm cu $E' = E \otimes L$:

$$\deg(E') = 0 \text{ sau } -1.$$

Este clar că este suficient să rezolvăm problema pentru E' , și deci putem presupune în plus $d = \deg(E) = 0$ sau -1 .

Din (11.18) deducem $\chi(E) = d + 2 \geq 1$, de unde $\dim H^0(E) \geq 1$. Fie $0 \neq s \in H^0(E)$. Punîndu-ne de acord cu notațiile demonstrației propoziției (11.16), s este atunci o secțiune globală a subfasciculului L_s . Deducem că $\deg(L_s) \geq 0$. Cum L_s este inversibil pe P^1 , avem deci $L_s \cong O_{P^1}(a)$ cu $a \geq 0$. Din demonstrația propoziției (11.16) mai deducem șirul exact

$$(*) \quad 0 \rightarrow O_{P^1}(a) \rightarrow E \rightarrow O_{P^1}(d-a) \rightarrow 0,$$

unde $d = \deg(E) = 0$ sau -1 . Altfel spus, am realizat pe E ca o extindere a lui $O_{P^1}(d-a)$ prin $O_{P^1}(a)$. Însă după (11.21), grupul $H^1(P^1, O_{P^1}(2a-d))$ clasifică clasele de izomorfism de extinderi ale lui $O_{P^1}(d-a)$ prin $O_{P^1}(a)$. Cum $a \geq 0$ și $d = 0$ sau -1 , avem $2a-d \geq -1$, de unde deducem $H^1(P^1, O_{P^1}(2a-d)) = 0$. Ținînd încă o dată cont de (11.21) deducem că extinderea $(*)$ este trivială și deci $E \cong O_{P^1}(a) \oplus O_{P^1}(d-a)$. Q.E.D.

(11.23) Teorema (11.22) este un caz special al unui rezultat al lui Grothendieck [5] (a se vedea de asemenea Atiyah [1]), care afirmă că orice O_{P^1} -modul local liber E de rang finit este de forma $O_{P^1}(m_1) \oplus \dots \oplus O_{P^1}(m_r)$, cu m_1, \dots, m_r numere întregi și $r = \text{rang } E$. În continuare ne va fi suficient însă acest caz particular ce se demonstrează mai simplu.

(11.24) *Referințe bibliografice.* Demonstrația teoremei (11.6) (care este esențială pentru demonstrația criteriului Noether-Tsen) este prezentată după Bucur [1]. Teorema (11.10) este o variantă a criteriului Noether-Tsen, variantă ce face (prin corolarul său (11.11)) legătura dintre suprafețele geometrice riglate și fibrările vectoriale de rang 2 pe curbe nesingulare și proiective. Faptele în legătură cu fibrările vectoriale pe curbe au fost prezentate după Atiyah [1], iar demonstrația simplă a teoremei lui Grothendieck în cazul special al fibrărilor de rang 2 (11.22) este luată din Beauville [1].

§ 12.

MODELE MINIMALE
DE SUPRAFEȚE RIGLATE

(12.1) Fie B o curbă proiectivă și nesingulară și E un O_B -modul local liber de rang 2. Fie $X = P(E)$ fibratul proiectiv asociat lui E și $f: X \rightarrow B$ proiecția sa canonică. Dacă $x \in X$ este un punct închis ce aparține fibrei $F_b = f^{-1}(b)$ cu $b = f(x)$, fie $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ transformarea pătratică a lui X de centru punctul x . Atunci imaginea inversă proprie F' a lui F_b are proprietățile $p_a(F') = 0$ și $(F')^2 = -1$, deoarece $p_a(F_b) = 0$ și $(F_b^2) = 0$. Altfel spus, F' este o curbă excepțională de prima specie. După (3.30) există atunci o unică contracție $\pi': \tilde{X} \rightarrow X'$ a lui F' la un punct nesingular (ce va fi în continuare notată prin $\text{cont}_{F'}: \tilde{X} \rightarrow X'$). Cum f este un morfism și F' este o componentă a uneia din fibrele lui $f \circ \pi$, obținem următoarea diagramă comutativă în care f' este morfism:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi'} & X' \\ & \searrow f \circ \pi & \swarrow f' \\ & B & \end{array}$$

În plus, toate fibrele lui f' sînt curbe integrale de gen aritmetic zero, și deci $f': X' \rightarrow B$ este o suprafață geometric riglată. Aplicația birațională $\pi' \circ \pi^{-1}: X \rightarrow X'$ poartă numele de transformarea elementară a suprafeței geometric riglate $f: X \rightarrow B$ de centru punctul x , și va fi în continuare notată prin $\text{elm}_x: X \rightarrow X'$.

(12.2) TEOREMĂ. Fie B o curbă nesingulară și proiectivă cu $p_a(B) > 0$. Atunci:

a) Dacă $f: X \rightarrow B$ este o suprafață geometric riglată de bază B , atunci X este model minimal.

b) Pentru orice model minimal X al corpului de funcții algebrice $k(B)(t)$, cu t o variabilă peste corpul funcțiilor raționale $k(B)$, există un morfism $f: X \rightarrow B$ astfel încât X să fie o suprafață geometrică riglată de bază B via morfismul f .

c) Orice aplicație birațională între două modele minimale X și X' ale lui $k(B)(t)$ este o compunere dintre un automorfism al lui X și un număr finit de transformări elementare de tipul celor descrise la (12.1).

Demonstrație. a) Presupunem prin absurd că ar exista pe X o curbă C excepțională de prima specie. Cum C este curbă rațională și $p_a(B) > 0$ (și B nesingulară), C este conținută în mod necesar într-o fibră a lui f , și deci C coincide cu una din fibrele lui f . Deci $(C^2) = 0$ și deci C nu ar mai fi curbă excepțională.

Punctele b) și c) ale teoremei (12.2) rezultă din următoarea :

(12.3) LEMĂ. Fie E' un fascicul local liber de rang 2 pe curba proiectivă și nesingulară B de gen aritmetic > 0 , X o suprafață și $f': X \rightarrow P(E')$ o aplicație birațională. Atunci există un produs finit de transformări elementare $g: P(E') \rightarrow P(E)$ astfel încât $g \circ f'$ să fie un morfism.

Demonstrație. Fie $g: P(E') \rightarrow P(E)$ un produs finit arbitrar de transformări elementare, $f = g \circ f'$ și $\lambda = \lambda(f)$ numărul minim de transformări pătratice ale lui X astfel încât să obținem o suprafață Y ce domină pe X (via compunerea π a acestor transformări pătratice) și astfel încât $f \circ \pi$ să fie un morfism.

Alegem acum g astfel încât $\lambda = \lambda(f)$ să fie minim. Vom arăta că $\lambda = 0$, adică f este un morfism.

Presupunem prin absurd că $\lambda > 0$. Atunci Y conține o curbă excepțională de prima specie C astfel încât suprafața $Y' = \text{cont}_C(Y)$ să domine pe X . Dacă imaginea în $P(E)$ a lui C ar fi un punct, atunci Y' ar domina pe $P(E)$, ceea ce ar contrazice minimalitatea lui λ . Deci imaginea D a lui C în $P(E)$ este o curbă. Cum C este o curbă rațională, rezultă că D este tot o curbă rațională, și cum $p_a(B) > 0$, D este în mod necesar o fibră a lui $P(E)$. Deci $(D^2) = 0$. Dacă inversul morfismului birațional $Y \rightarrow P(E)$ nu ar avea nici un punct fundamental pe D , atunci acest morfism ar fi un izomorfism bireglat al unei vecinătăți a lui C pe o vecinătate a lui D . Însă aceasta ar contrazice egalitățile $(C^2) = -1$ și $(D^2) = 0$. Deci există pe D un punct fundamental x al inversului morfismului $Y \rightarrow P(E)$. Atunci Y domină suprafața $\text{dil}_x(P(E))$ obținută dilatând punctul x , și deci Y domină $\text{elm}_x(P(E))$. Cum C este apli-

cată într-un punct din $\text{elm}_x(P(E))$, rezultă că, Y' domină pe $\text{elm}_x(P(E))$, deci $\lambda(\text{elm}_x \circ g \circ f') < \lambda(g \circ f') = \lambda$, fapt ce contrazice modul de alegere al lui g . Q.E.D.

(12.4) DEFINIȚIE. Vom spune că o suprafață X este *rațională* dacă X este birațional izomorfă cu planul proiectiv P^2 .

Cum P^2 este birațional izomorf cu $P^1 \times P^1$, orice suprafață rațională este riglată avînd $q = 0$. Reciproc, fie X o suprafață riglată cu $q = 0$. Atunci X este birațional izomorfă cu $P^1 \times B$, cu B curbă nesingulară și proiectivă. Cum $q = \dim H^1(O_X) = \dim H^1(O_{P^1 \times B}) = \dim H^1(O_B) = p_a(B)$, rezultă $p_a(B) = 0$ și deci X este rațională.

(12.5) Vom examina acum suprafețele geometric riglate de bază $B = P^1$. Conform teoremei (11.22) orice O_{P^1} -modul local liber E de rang 2 este de forma $O_{P^1}(a) \oplus O_{P^1}(b)$, cu $a \leq b$ întregi. Deci

$$E = O_{P^1}(a) \oplus O_{P^1}(b) = O_{P^1}(a) \otimes (O_{P^1} \oplus O_{P^1}(b-a)) = L \otimes (O_{P^1} \oplus O_{P^1}(n)) \text{ cu } L \text{ inversibil și } n \geq 0. \text{ Atunci } P(E) \cong P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}(n)) \text{ (cf. (11.11)).}$$

În continuare vom nota prin X_n suprafața geometric riglată $P(O_{P^1} \oplus O_{P^1}(n))$ de bază P^1 , cu $n \geq 0$, iar cu $f_n: X_n \rightarrow P^1$ proiecția sa canonică. Atunci X_n se poate interpreta ca fiind compactificata fibratului vectorial în drepte $V(O_{P^1}(n)) \rightarrow P^1$ atașat O_{P^1} -modulului inversibil $O_{P^1}(n)$ (compactificînd fiecare fibră a lui $V(O_{P^1}(n))$ cu punctul de la infinit). Avem atunci două secțiuni $\sigma_0: P^1 \rightarrow X_n$ și $\sigma_\infty: P^1 \rightarrow X_n$ ale lui f_n , anume secțiunea nulă și secțiunea infinit ale lui f_n . Atunci fibratul conormal al lui $D_0 = \sigma_0(P^1)$ în X_n este izomorf cu $O_{P^1}(n)$, iar fibratul conormal al lui $D = \sigma_\infty(P^1)$ cu $O_{P^1}(-n)$. Deci:

$$(D_0^2) = -n \text{ și } (D^2) = n.$$

După (11.14) orice divizor Δ pe X_n este numeric echivalent cu $aD + bF$, unde (a, b) este o pereche de numere întregi bine determinată, iar F este o fibră închisă a lui f_n . Atunci

$$(\Delta^2) = a^2(D^2) + 2ab(D \cdot F) = a^2n + 2ab,$$

deoarece $(D \cdot F) = 1$ și $(F^2) = 0$. Dacă Δ este divizor efectiv avem $(\Delta \cdot F) \geq 0$. Însă $(\Delta \cdot F) = a(D \cdot F) + b(F^2) = a$. Deci dacă Δ este efectiv și $\Delta \approx aD + bF$, atunci $a \geq 0$.

Fie Δ un divizor efectiv numeric echivalent cu $aD + bF$. Atunci din $p_a(D) = 0$, $p_a(F) = 0$, $(D^2) = n$ și $(F^2) = 0$ deducem $(K \cdot D) = -2 - (D^2) = -2 - n$ și $(K \cdot F) = -2$, de unde $(K \cdot \Delta) = a(-2 - n) - 2b$. Deci :

$$2p_a(\Delta) - 2 = (\Delta^2) + (K \cdot \Delta) = a^2n + 2ab - 2a - an - 2b.$$

Deoarece $\text{Supp}(D_0) \cap \text{Supp}(D) = \emptyset$ avem $(D_0 \cdot D) = 0$. Fie $D_0 \approx aD + bF$. Atunci $a=1$ și $b = -n$. Într-adevăr, $1 = (D_0 \cdot F) = a(D \cdot F) + b(F^2) = a$, deci $a = 1$. Pe de altă parte, $0 = (D_0 \cdot D) = (D^2) + b(D \cdot F) = n + b$, de unde $b = -n$. Deci :

$$D_0 \approx D - nF.$$

Dacă Δ este un divizor efectiv ce nu conține pe D_0 drept componentă, atunci dacă $\Delta \approx aD + bF$, avem și $b \geq 0$. Într-adevăr, $0 \leq (\Delta \cdot D_0) = a(D \cdot D_0) + b(F \cdot D_0) = b$. De aici rezultă că dacă Δ este o curbă integră pe X_n , atunci nu putem avea $(\Delta^2) < 0$ decât dacă $n > 0$ și $\Delta = D_0$. Într-adevăr, dacă $\Delta \neq D_0$, atunci $\Delta \approx aD + bF$, cu $a \geq 0$ și $b \geq 0$, deci $(\Delta^2) = a^2n + 2ab \geq 0$, iar dacă $\Delta = D_0$, avem $(D_0^2) = -n$. Cum $p_a(D_0) = 0$, am obținut :

(12.6) LEMĂ. *Suprafețele X_n sînt modele minimale ale lui P^2 pentru orice $n \neq 1$ și $n \geq 0$, iar dacă $n > 0$ singura curbă integră Δ pe X_n cu proprietatea $(\Delta^2) < 0$ este D_0 . Suprafața X_1 conține o curbă excepțională de prima specie, anume D_0 , iar $\text{cont}_{D_0}(X_1)$ este biregular izomorfă cu P^2 . Suprafața X_0 este biregular izomorfă cu $P^1 \times P^1$.*

Pînă acum am folosit deja următoarele două notații : dacă E este o curbă excepțională de prima specie pe suprafața X , atunci prin $\text{cont}_E(X)$ am notat suprafața obținută din X contractînd E la un punct nesingular (cf. (3.30)), iar dacă $x \in X$ este un punct închis pe suprafața X , atunci prin $\text{dil}_x(X)$ am notat suprafața obținută dilatînd punctul x . Dacă E este o curbă excepțională de prima specie ce se contractă la punctul $y \in Y = \text{cont}_E(X)$, atunci aplicațiile birationale $\text{cont}_E : X \rightarrow Y$ și $\text{dil}_Y : Y \rightarrow X$ sînt deci inverse una alteia. Am mai introdus transformarea elm_x care transformă o suprafață geometric riglată de bază B într-o altă suprafață geometric riglată de bază B . Transformarea elm_x a fost numită transformarea elementară de centru x . În fine, vom nota prin $\text{refl} : X_0 = P^1 \times P^1 \rightarrow X_0$ morfismul $(x, y) \mapsto (y, x)$.

Fie acum $x \in X_0$. Este imediat de văzut că $\text{elm}_x(X_0) = X_1$. Dacă $n \geq 1$, fie $x \in X_n$ și fie F fibra lui f ce trece prin punctul x . Deosebim două cazuri :

a) $x \in F \cap D_0$. Atunci $\text{elm}_x(X_n) = X_{n+1}$. Într-adevăr, considerînd figura 9, avem :

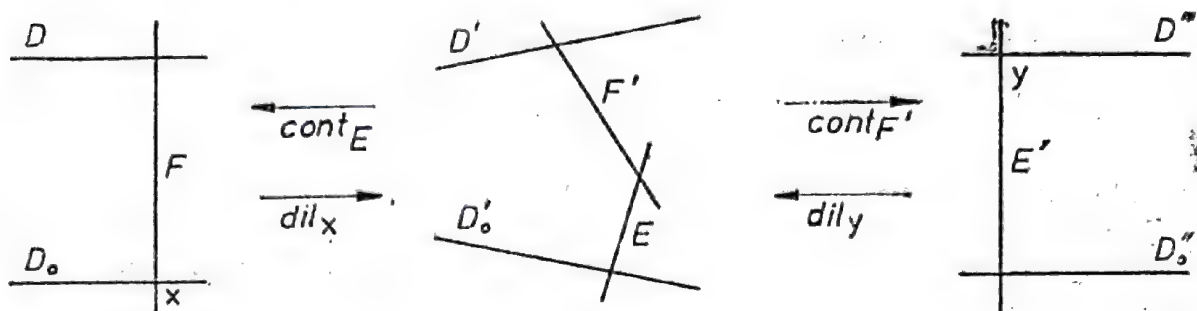


Figura 9

$(D_0'^2) = -n-1$, $(D'^2) = n$, $(D_0''^2) = -n-1$, $(D''^2) = n+1$ și cum $\text{elm}_x(X_n)$ este una din suprafețele X_m , avem $m = n+1$.

b) $x \notin F \cap D_0$. Fără a restrînge generalitatea putem presupune $x \in F \cap D$ (deoarece putem schimba punctul de la infinit al lui P^1 păstrînd pe 0 neschimbat). Atunci avem $\text{elm}_x(X_n) = X_{n-1}$. Într-adevăr, din figura 10 deducem :

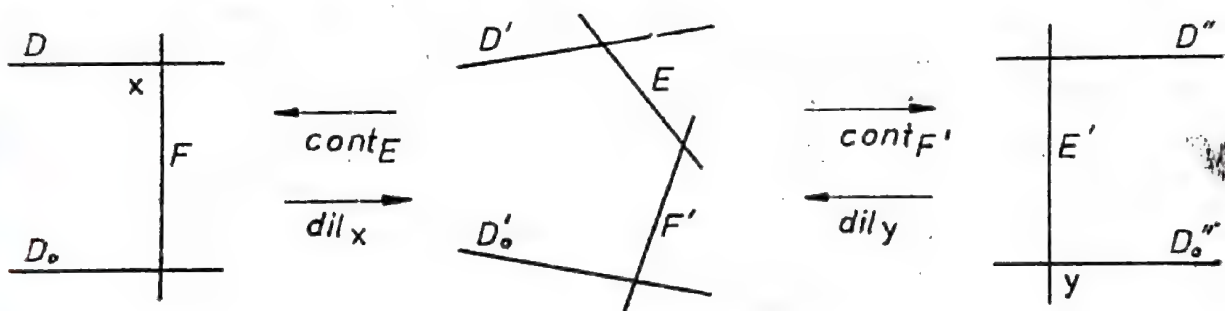


Figura 10

$(D'^2) = n-1$, $(D_0'^2) = -n$, $(D''^2) = n-1$, $(D_0''^2) = -n+1$. Cum $\text{elm}_x(X_n)$ este una din suprafețele X_m , rezultă că $m = n-1$.

Deci am demonstrat

(12.7) PROPOZIȚIE. Dacă $m \neq n$ sînt întregi ≥ 0 , există o aplicație birațională $g : X_m \rightarrow X_n$ care este o compunere de transformări elementare.

(12.8) TEOREMĂ. (Nagata). Orice model minimal al corpului $k(t_1, t_2)$, cu t_1 și t_2 variabile peste k , este izomorf fie cu P^2 , fie cu una din suprafețele X_n cu $n \geq 0$ și $n \neq 1$.

Pentru demonstrația teoremei (12.8) avem nevoie de mai multe leme.

(12.9) LEMĂ. În notațiile de mai sus fie $f_0 : X \rightarrow X_{n_0}$ un morfism birațional de suprafețe ($n_0 \geq 0$) și fie C o curbă nesingulară pe X . Există un produs finit $g : X_{n_0} \rightarrow X_n$ de transformări elementare generalizate (vezi definiția (12.10)) astfel încît $g \circ f_0 = f$ este

un morfism și astfel încît curba $C' = f(C)$ are următoarele proprietăți dacă $C' \approx aD + bF$:

- Fiecare punct singular al lui C' are multiplicitatea $\leq a/2$
- Dacă $n = 0$, atunci $a \leq b$.
- Dacă $n = 1$, atunci orice punct singular al lui C' are multiplicitatea $\leq b$.
- Dacă $a = 1$, atunci $(C^2) = (C'^2)$.
- Dacă $n = 1$, $a = 2$ și $b = 0$, atunci $(C^2) = (C'^2)$.

(12.10) DEFINIȚIE. Prin transformare elementară generalizată înțelegem una din următoarele transformări: elm_x , $\text{refl} : X_0 \rightarrow X_0$ sau $\text{int}_x : X_1 \rightarrow X_1$, unde $x \notin D_0$ și $\text{int}_x = \text{cont}_{D_0} \circ \text{dil}_x$.

Demonstrația lemei (12.9). Dacă $f_0(C)$ este un punct $x \in X_{n_0}$, atunci f_0 domină $\text{dil}_x(X_{n_0})$, deci și pe $\text{elm}_x(X_{n_0})$. Dacă $f_1(C)$ este un punct, unde $f_1 = \text{elm}_x \circ f_0$, atunci repetînd procedeul de mai sus, găsim o compunere $g : X_{n_0} \rightarrow X_n$ de transformări elementare astfel încît $g \circ f_0$ este morfism și $(g \circ f_0)(C)$ este o curbă pe X . (Dacă prin absurd $(g \circ f_0)(C)$ ar fi un punct pentru orice compunere g de transformări elementare, atunci X ar domina un număr oricît de mare de dilatări succesive de puncte, lucru evident imposibil.)

Dintre toate compunerile g de transformări elementare cu proprietățile $g \circ f_0$ este morfism și $(g \circ f_0)(C)$ este curbă, alegem un g astfel încît $a = a((g \circ f_0)(C))$ ($(g \circ f_0)(C) \approx aD + bF$) să fie minim. Acest lucru este totdeauna posibil deoarece am văzut mai sus că $a \geq 0$. Dintre toate compunerile g cu $a((g \circ f_0)(C))$ minim alegem un g cu proprietatea că autointersecția lui $(g \circ f_0)(C)$ este minimă. Acest lucru este posibil deoarece $g \circ f_0$ fiind morfism birațional, avem $(C^2) \leq ((g \circ f_0)(C)^2)$. Notăm atunci prin $f = g \circ f_0$ și vom arăta că f are toate proprietățile cerute. Fie $f : X \rightarrow X_n$.

a) Dacă $C' = f(C)$ are o singularitate în punctul x de multiplicitate $r > a/2$, aplicăm elm_x . Deoarece C este curbă nesingulară iar x este singularitate pentru C' , f domină $\text{dil}_x(X_n)$, deci $\text{elm}_x \circ f$ este morfism. Situația este reprodusă în figura 11.

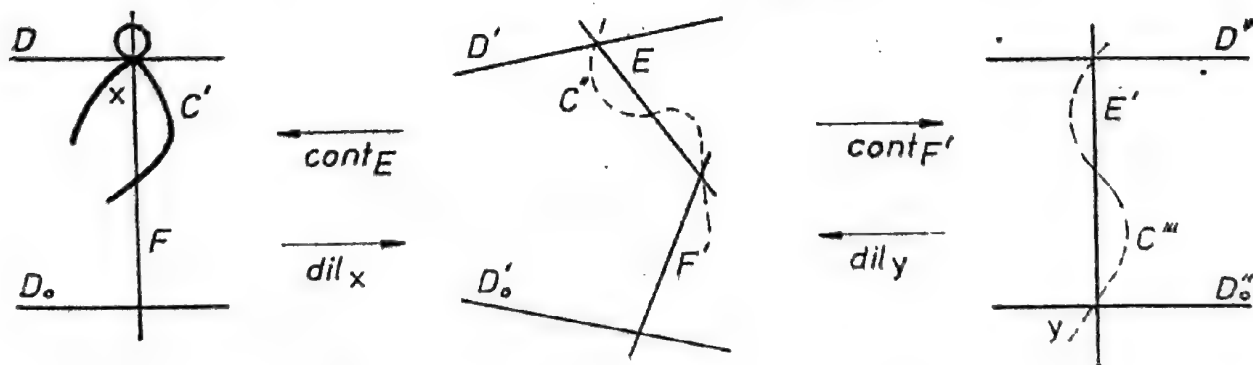


Figura 11

Calculând numerele de intersecție avem, ținând cont de Safarevici [1], cap. IV, § 3, din partea I: $(C'^2) = (C''^2) + r^2 = (C'''^2) + r'^2$, unde r' este multiplicitatea inelului local $O_{C''', y}$. Însă $r = (E \cdot C'')$ și $r' = (F' \cdot C''')$ și deci:

$$r + r' = (E + F' \cdot C'') = (\text{cont}_{E^{-1}}(F) \cdot C'') = (\text{cont}_{E^{-1}}(F) \cdot C'' + E) - (\text{cont}_{E^{-1}}(F) \cdot E) = (\text{cont}_{E^{-1}}(F) \cdot \text{cont}_{E^{-1}}(C')) - (E + F' \cdot E) = (F \cdot C') - (E^2) - (F' \cdot E) = (F \cdot C') = (F \cdot aD + bF) = a.$$

Cum $r > a/2$, $r' < a/2$ și deci $r' < r$. Ținând cont de primele relații, avem $(C'^2) - r^2 + r'^2 = (C'''^2)$, și deoarece $r' < r$, obținem $(C'''^2) < (C'^2)$, fapt ce contrazice minimalitatea lui (C'^2) , deoarece se verifică imediat că $a(C''') = a(C') = a$.

b) Dacă $n = 0$, atunci considerând $\text{refl} \circ f$ vedem că rolurile lui a și b se schimbă între ele. Din minimalitatea lui a deducem că $a \leq b$.

c) Dacă $n = 1$, fie x un punct singular al lui C' de multiplicitate r . Dacă $x \in D_0$ avem în mod evident $r \leq (C' \cdot D_0) = (C' \cdot D - F) = (C' \cdot D) - (C' \cdot F) = (aD + bF \cdot D) - (aD + bF \cdot F) = a(D^2) + b(F \cdot D) - a(D \cdot F) - b(F^2) = b$.

Dacă $x \notin D_0$, considerăm $f_1 = \text{int}_x \circ f$. Fie f fibra lui $X_n \rightarrow P^1$ ce conține pe x , și $y = D_0 \cap F$. Situația este reprezentată în figura 12.

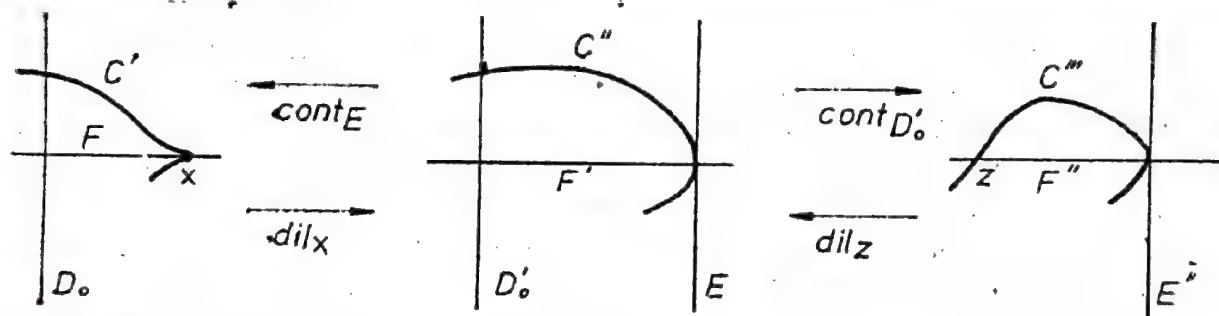


Figura 12

Avem succesiv: $a = (C' \cdot F)$, $(C'' \cdot F') = (C' \cdot F) - r = a - r$, $(C'' \cdot F') = (F'' \cdot C''')$ - multiplicitatea lui C'' în $z = \text{cont}_{D'_0}(D'_0) = a' - (C'' \cdot D'_0) = a' - (D_0 \cdot C') = a' - (D_0 \cdot aD + bF) = a' - b$. Obținem $a - r = a' - b$, sau încă $a' = a + b - r$, și cum $a' \geq a$, obținem $r \leq b$.

d) Dacă $a = 1$, presupunem prin absurd $(C^2) < (C'^2)$. Atunci există un punct $x \in C'$ în care f^{-1} nu este definită. Aplicând elm_x , găsim că $f_1 = \text{elm}_x \circ f$ este morfism, $a_1 = a$ și $(C_1^2) = (C'^2) - 1$, ceea ce contrazice minimalitatea lui (C'^2) .

e) Dacă $n = 1$, $a = 2$, $b = 0$ și prin absurd $(C^2) < (C'^2)$, atunci există un punct $x \in C'$ în care f^{-1} nu este definită. Punctul x nu se poate afla pe D_0 deoarece $b = (C' \cdot D_0) = 0$ (deci C' nu taie

pe D_0). Aplicînd int_x găsim $a' = a + b - 1 = 1$ (deoarece după c) curba C' nu are singularități) și astfel se contrazice minimalitatea lui a . Q.E.D.

(12.11) LEMĂ. Fie C o curbă ireductibilă pe suprafața X și fie $f: X \rightarrow X_n$ un morfism birațional avînd proprietățile a), b), c), d) și e) din lema (12.9). Atunci:

- i) Dacă $a = 2$, C este nesingulară de gen g și $(C^2) \leq 4g + 4$.
- ii) Dacă $a = 3$, C este nesingulară de gen g și $(C^2) \leq 3g + 6$.
- iii) Dacă $a \geq 4$ și $n \neq 1$, sau $a \geq 4$, $n = 1$ și $b \geq a/2$, atunci $(C^2) \leq 2a/(a-2) \cdot (p_a(C) - 1)$.
- iv) Dacă $a \geq 4$, $n = 1$ și $b < a/2$, atunci $(C^2) < 2k/(k-3)$ ($p_a(C) - 1$), unde $k = a + b$.

Demonstrație. Considerăm la început cazul $X = X_n$ și $f = 1_{X_n}$. Atunci ținînd cont de (12.5) avem:

$$(C^2) = a^2n + 2ab \text{ și } 2p_a(C) - 2 = a^2n + 2ab - 2a - an - 2b.$$

- i) Dacă $a = 2$, C este nesingulară după a) și avem:

$$(C^2) = 4n + 4b, 2p_a(C) = 2n + 2b - 4, \text{ deci } (C^2) = 2g + 4 \leq 4g + 4.$$

- ii) Dacă $a = 3$, C este nesingulară după a) și avem:

$$(C^2) = 9n + 6b, 2p_a(C) - 2 = 6n + 4b - 6, \text{ deci } (C^2) = \\ = 3p_a(C) + 6 = 3g + 6.$$

- iii) Dacă $a \geq 4$, atunci

$$2p_a(C) = (a-1)(an + 2b - 2) \geq 3(4n + 2b - 2).$$

Dacă $n = 0$, atunci după b) avem $b \geq a \geq 4$, deci $3(4n + 2b - 2) \geq 18$.

Dacă $n > 0$, deoarece $b \geq -n$ avem $4n + 2b - 2 \geq 2n - 2 \geq 2$. Deci în toate cazurile obținem $p_a(C) > 1$. Putem deci considera

$$\frac{(C^2)}{2p_a(C) - 2} = \frac{a}{a^2 - 1 - u}, \text{ cu } u = \frac{2a}{an + 2b}.$$

Dacă arătăm că $u \leq 1$, atunci avem $a/(a-1-u) \leq a/(a-2)$, de unde concluzia lui iii).

Dacă $n = 0$, din b) deducem $a \leq b$ și deci $u = 2a/2b = a/b \leq 1$. Dacă $n = 1$, atunci prin ipoteză $b \geq a/2$ și deci $u = 2a/(a+2b) \leq 2a/3a \leq 1$. Dacă $n > 1$, curba C nu poate coincide cu D_0 deoarece $p_a(C) > 0$, de unde $b \geq 0$, sau încă $u \leq 1$.

iv) Dacă $a \geq 4$ și $n = 1$, avem :

$$2p_a(C) - 2 = a(a-3) + 2b(a-1) \geq 4,$$

și deci are sens să considerăm expresia $(C^2)/(2p_a(C) - 2)$. Înlocuind $a = k - b$ găsim :

$$\frac{(C^2)}{2p_a(C) - 2} = \frac{k}{k-3-v}, \quad \text{unde } v = \frac{kb - 3b^2}{k^2 - b^2}.$$

Presupunind $b < a/2$ avem $3b < k$ și deci $v > 0$. Deci

$$(C^2) < 2k/(k-3) (p_a(C) - 1).$$

ceea ce probează lema (12.11) în cazul $X = X_n$ și $f = 1_{X_n}$.

În cazul general vom utiliza inducție după numărul de transformări pătratice ce trebuie aplicate pentru a obține pe f . Ne reducem deci la a demonstra că dacă $X = \text{dil}_x(X')$ cu $x \in X'$ și D este imaginea lui C prin $(\text{dil}_x)^{-1}$ și teorema este valabilă pentru D , atunci ea este valabilă și pentru C .

i) și ii). Deoarece D este nesingulară, C este de asemenea nesingulară și de același gen cu C și $(C^2) \leq (D^2)$.

iii) Fie $r \geq 0$ multiplicitatea punctului x pe curba $C(r=0)$ înseamnă că $x \notin C$). Atunci

$$(C^2) = (D^2) - r^2 \quad \text{și} \quad p_a(C) = p_a(D) - 1/2 \cdot r(r-1).$$

și deci

$$(C^2) \leq 2a/(a-2) \cdot (p_a(C) - 1) + a/(a-2) \cdot r(r-1) - r^2.$$

Însă după condiția a) avem $r \leq a/2$ și deci

$$a/(a-2) \cdot r(r-1) - r^2 = r/(a-2) (2r-a) \leq 0,$$

ceea ce implică concluzia.

iv) Avem :

$$(C^2) = 2k/(k-3) \cdot (p_a(C) - 1) + k/(k-3) \cdot r(r-1) - r^2.$$

După condiția c) avem $r \leq n$, și deci $r \leq k/3$ și

$$k/(k-3) r(r-1) - r^2 = r/(k-3) \cdot (3r - k) \leq 0,$$

ceea ce implică concluzia. Q.E.D.

Ca să demonstrăm teorema (12.8) va fi suficient să probăm :

(12.12) LEMĂ. Fie X o suprafață și $f_0: X \rightarrow X_{n_0}$ o aplicație birațională. Atunci sau există un produs $g: X_{n_0} \rightarrow X_n$ de transformări elementare generalizate astfel încât $f = g \circ f_0$ este morfism, sau $X \cong P^2$ și există un produs $g: X_{n_0} \rightarrow X_1$ de transformări elementare generalizate astfel încât, dacă $f = g \circ f_0$, să avem $f = \text{dil}_x \circ h$, unde $x \in X$ și h este un automorfism (biregulat) al lui X .

Demonstrație. Considerăm toate aplicațiile biraționale $f = g \circ f_0$, cu $g: X_{n_0} \rightarrow X_n$ produse de transformări elementare generalizate. Pentru un astfel de f fie $\lambda(f)$ numărul minim de transformări pătratice ce trebuie aplicate lui X pentru a obține o suprafață ce domină pe X_n . Alegem un g astfel încât $\lambda(f)$ să fie minim. Vom arăta că $\lambda(f) = 0$ (adică f este morfism), sau $\lambda(f) = 1$, $X = P^2$ și $n = 1$.

Presupunem $\lambda(f) > 0$. Aplicăm $\lambda(f)$ transformări pătratice lui X și obținem o suprafață Y ce domină pe X_n . Fie C o curbă excepțională de prima specie pe Y astfel încât $\text{cont}_C(Y)$ să domine pe X . După lema (12.9) putem presupune că morfismul (obținut componând pe f cu cele $\lambda(f)$ transformări pătratice) $\varphi: Y \rightarrow X_n$ are proprietățile a), b), c), d) și e). Fie $C' = \varphi(C)$.

Cazul $a = 0$. Atunci $C' \approx bF$ cu $b > 0$, de unde C' este o curbă nesingulară cu $(C')^2 = 0$. Cum $(C^2) = -1$, există un punct $x \in C'$ în care φ^{-1} nu este definită. Atunci $\text{cont}_C(Y)$ domină $\text{elm}_x(X_n)$, ceea ce contrazice minimalitatea lui $\lambda(f)$.

Cazul $a = 1$. După d) avem $(C^2) = (C'^2) = -1$, deci în mod necesar avem $n = 1$, $C' = D_0$ (cf. (12.6)). Dacă φ este izomorfism, atunci $X = P^2$, $\lambda(f) = 1$. Dacă φ nu ar fi izomorfism ar exista un $x \in X_1 - D_0$ astfel încât $\text{cont}_C(Y)$ să domine $\text{int}_x(X_1)$, ceea ce ar contrazice minimalitatea lui $\lambda(f)$.

Cazul $a = 2$. După a) C' este nesingulară, și cum C este rațională, avem $p_a(C') = 0$. Din formula ce exprimă $p_a(C')$ în funcție de a , b și n obținem $b + n = 1$. Deci sau $n = 0$ și $b = 1$ (ceea

ce este imposibil după b)), sau $n = 1$ și $b = 0$. Deoarece $(C'^2) = 4 > 0$, această ultimă alternativă este imposibilă ținând cont de e).

Cazul $a = 3$. După a) C' este nesingulară, deci, ca mai sus, avem $p_a(C') = 0$ și $3n + 2b = 0$. Deci $n = 0$ și $b = 1$, ceea ce după b) este imposibil.

Cazul $a \geq 4$. Atunci ne găsim fie în cazul iii), fie în cazul iv) al lemei (12.11).

Dacă avem iii), deducem $(C^2) \leq -2a/(a-2)$, iar dacă avem iv), $(C^2) \leq -2k/(k-3)$. Ambele inegalități contrazic însă faptul că $(C^2) = -1$. Q.E.D.

Prin această teorema (12.8) este demonstrată.

(12.13) *Referințe bibliografice.* Paragraful de față se bazează pe Hartshorne [4]. Cu toate că teoremele (12.2) și (12.8) se vor deduce în paragraful următor și în alt mod (via clasificarea suprafețelor), am preferat să prezentăm și aceste demonstrații directe și elementare.

§ 13.

CARACTERIZAREA SUPRAFETELOR RIGLATE ȘI RAȚIONALE

Ținând cont de (9.3) și de demonstrația lui (8.3) a) avem :

(13.1) PROPOZIȚIE. *Următoarele afirmații sînt echivalente pentru o suprafață minimală X :*

a) *Există o curbă integră C pe X astfel încît $(K \cdot C) < 0$, altfel spus, X aparține clasei a) (cf. (8.2)).*

b) *Adjuncția pe X se termină, adică pentru orice divizor $D \in \text{Div}(X)$ există un întreg n_D astfel încît $|D + nK| = \emptyset$ pentru orice $n \geq n_D$.*

c) $c(X) = -1$, adică $p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

d) $p_{12} = 0$.

Scopul acestui paragraf este studiul suprafețelor minimale X ce satisfac una din proprietățile echivalente a), b), c) sau d) din propoziția (13.1). Exemple de asemenea suprafețe avem deja la îndemînă : anume suprafețele riglate minimale (cf. propoziția (11.15)). Rezultatele principale ale acestui paragraf sînt :

(13.2) TEOREMĂ. (Enriques). *Fie X o suprafață minimală. X este suprafață riglată dacă și numai dacă una din condițiile echivalente a), b), c) sau d) din propoziția (13.1) este verificată.*

(13.3) TEOREMĂ. (Castelnuovo). *Fie X o suprafață minimală. Atunci X este suprafață rațională dacă și numai dacă $q = p_2 = 0$.*

Studiul suprafețelor riglate este strîns legat de studiul familiilor de curbe raționale. Dacă D este un divizor efectiv pe X , atunci izomorfismul $O_X(K + D) \otimes O_D = \omega_D$ sugerează că divizorii efectivi D cu proprietatea $|K + D| = \emptyset$ trebuie să fie puși în legătură cu familiile de curbe raționale de pe X , deoarece o curbă integră D de pe X este rațională dacă și numai dacă $|\omega_D| = \emptyset$. Pe o suprafață minimală X ce verifică una din condițiile echivalente a), b), c), sau

d) din (13.1) existența unor asemenea divizori efectivi D cu proprietatea $|K + D| = \emptyset$ este asigurată de condiția b). Începem prin a studia acești divizori.

(13.4) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață minimală și D un divizor efectiv pe X cu proprietatea $|K + D| = \emptyset$. Atunci $p_g = 0$ și morfismul natural $\text{Pic}_X^0 \rightarrow \text{Pic}_D^0$ de scheme Picard este surjectiv, iar Pic_D^0 este varietate abeliană.

Demonstrație. Deoarece $|K| \subseteq |K + D| = \emptyset$ (D este efectiv) avem $p_g = 0$. Pe de altă parte, condiția $|K + D| = \emptyset$ se interpretează via dualitatea Serre prin $H^2(O_X(-D)) = 0$, și deci din șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(-D) \rightarrow O_X \rightarrow O_D \rightarrow 0$$

deducem că omomorfismul natural $H^1(O_X) \rightarrow H^1(O_D)$ este surjectiv. Deoarece $p_g = 0$, schema Picard Pic_X^0 este redusă (vezi Mumford [1], lecția 27), deci Pic_X^0 este o varietate abeliană. Cum $H^1(O_X)$ (resp. $H^1(O_D)$) se identifică cu spațiul tangent în origine la Pic_X^0 (resp. la Pic_D^0), deducem că $\text{Pic}_X^0 \rightarrow \text{Pic}_D^0$ este morfism surjectiv, și deoarece Pic_X^0 este varietate abeliană, rezultă că Pic_D^0 este de asemenea varietate abeliană. Q.E.D.

(13.5) PROPOZIȚIE. Fie $D = \sum_{i=1}^r n_i E_i$ un divizor efectiv pe suprafața minimală X cu proprietatea $|K + D| = \emptyset$, unde $n_i \geq 1$, E_i este curbă integră, iar dacă $i \neq j$, atunci $E_i \neq E_j$. Atunci :

- i) Fiecare curbă E_i este nesingulară și $\sum_{i=1}^r p_a(E_i) \leq g$.
- ii) $\{E_i\}_i$ este o configurație conexă de curbe care nu are bucle.
- iii) Dacă $n_i \geq 2$, atunci are loc una din situațiile :
 - a) E_i este curbă rațională,
 - b) $(E_i^2) < 0$.
 - c) E_i este curbă eliptică, $(E_i^2) = 0$, iar fibratul normal al lui E_i în X este netrivial.

Demonstrație. i) Deoarece $|K + E_i| \subseteq |K + D| = \emptyset$, din (13.4) avem că $\text{Pic}_X^0 \rightarrow \text{Pic}_{E_i}^0$ este morfism surjectiv și $\text{Pic}_{E_i}^0$ este varietate abeliană. Deci E_i este nesingulară. Într-adevăr, dacă E_i ar avea singularități, fie \tilde{E}_i normalizata lui E_i . Folosind teorema de structură a schemelor Picard pentru curbe avem că $\text{Pic}_{\tilde{E}_i}^0$ este o extindere a lui $\text{Pic}_{E_i}^0$, printr-un subgrup afin netrivial, combinație de gru-

puri aditive G_a sau de grupuri multiplicative G_m (vezi Serre [3] cap. V, sau Oort [1]). Însă $\text{Pic}_{E_i}^0$ fiind varietate abeliană, nu putem avea subgrupuri afine ale lui $\text{Pic}_{E_i}^0$ netriviale. Deci $\tilde{E}_i = E_i$.

Asemănător, $|K + D'| \subseteq |K + D| = \emptyset$, unde $D' = \sum_{i=1}^r E_i$, și din (13.4) rezultă că $\text{Pic}_{D'}^0$ este varietate abeliană. Deci D' (și deci D) este curbă conexă, iar intersecția oricăror două componente E_i și E_j (cu $i \neq j$ și $E_i \cap E_j \neq \emptyset$) este transversală, deoarece altminteri $\text{Pic}_{D'}^0$ ar conține subgrupuri afine izomorfe cu G_m (vezi de exemplu discuția de la (3.4.4)). Șirul exact (3.4.2)

$$0 \rightarrow O_{D'} \rightarrow \prod_{i=1}^r O_{E_i} \rightarrow F \rightarrow 0$$

arată că $\dim H^1(O_{D'}) \geq \sum_{i=1}^r \dim H^1(O_{E_i}) = \sum_{i=1}^r p_a(E_i)$. Însă deoarece $|K + D'| = \emptyset$, avem $H^2(O_X(-D')) = 0$ și deci omomorfismul de restricție $H^1(O_X) \rightarrow H^1(O_{D'})$ este surjectiv, de unde inegalitatea

$$\sum_{i=1}^r p_a(E_i) \leq \dim H^1(O_X) = q.$$

ii) Dacă D ar conține o buclă, atunci Pic_D^0 ar conține un subgrup izomorf cu G_m , lucru imposibil într-o varietate abeliană.

iii) Dacă $n_i \geq 2$, atunci $|K + 2E_i| \subseteq |K + D| = \emptyset$, și deci $\text{Pic}_{2E_i}^0$ este varietate abeliană după (13.4). De aici rezultă că morfismul natural $\text{Pic}_{2E_i}^0 \rightarrow \text{Pic}_{E_i}^0$ este izomorfism.

Într-adevăr, considerăm șirurile exacte :

$$0 \rightarrow I = O_{E_i}(-E_i \cdot E_i) \rightarrow O_{2E_i} \rightarrow O_{E_i} \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{\alpha} O_{2E_i}^* \rightarrow O_{E_i}^* \rightarrow 1$$

($I^2 = 0$ și $\alpha(x) = 1 + x$). Al doilea șir induce șirul exact de coomologie

$$0 \rightarrow H^1(I) \rightarrow \text{Pic}(2E_i) \rightarrow \text{Pic}(E_i)$$

sau încă

$$0 \rightarrow H^1(I) \rightarrow \text{Pic}^0(2E_i) \rightarrow \text{Pic}^0(E_i).$$

Dacă $H^1(I)$ ar fi nenul, $\text{Pic}_{2E_i}^0$ ar conține un subgrup afin izomorf cu G_a , lucru imposibil într-o varietate abeliană. Deci $H^1(I) = 0$. Acum șirul exact de coomologie asociat primului șir implică :

$$0 = H^1(I) \rightarrow H^1(O_{2E_i}) \rightarrow H^1(O_{E_i}),$$

și deci aplicația tangentă în origine la $\text{Pic}_{2E_i}^0 \rightarrow \text{Pic}_{E_i}^0$ este izomorfism, de unde afirmația că $\text{Pic}_{2E_i}^0 \rightarrow \text{Pic}_{E_i}^0$ este izomorfism.

În particular am dovedit și că $H^1(O_{E_i}(-E_i \cdot E_i)) = 0$. Dacă $(E_i^2) \geq 0$, atunci cum $\deg_{E_i}(O_{E_i}(-E_i \cdot E_i)) = -(E_i^2) \leq 0$, rezultă că E_i este sau curbă rațională, sau curbă eliptică și $(E_i^2) = 0$ sau 1. Dacă E_i este curbă eliptică și $(E_i^2) = 0$, atunci este clar că $O_{E_i}(-E_i \cdot E_i) \not\cong O_{E_i}$, iar dacă E_i este curbă eliptică și $(E_i^2) = 0$, atunci din $H^1(O_{E_i}(-E_i \cdot E_i)) = 0$ rezultă din nou că $O_{E_i}(-E_i \cdot E_i) \not\cong O_{E_i}$. Q.E.D.

(13.6) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață, x_1, \dots, x_n n puncte închise distincte două câte două și $D \in \text{Div}(X)$ un divizor astfel încât $\dim |D| \geq 3n$. Atunci există un divizor $D' \in |D|$ astfel încât fiecare x_i aparține lui D' și este punct multiplu al lui D' .

Demonstrație. Considerăm șirul exact

$$0 \rightarrow O_X(D) \otimes I_1 \otimes \dots \otimes I_n \rightarrow O_X(D) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n k(x_i)^3 \rightarrow 0,$$

unde $(I_i)_z = O_{X,z}$ dacă $z \neq x_i$ și $(I_i)_{x_i} = m_{X,x_i}^2$ (observăm că $\dim O_{X,x_i}/m_{X,x_i}^2 = 3$). Din șirul exact de coomologie

$$0 \rightarrow H^0(O_X(D) \otimes I_1 \otimes \dots \otimes I_n) \rightarrow H^0(O_X(D)) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n k(x_i)^3$$

deducem că $H^0(O_X(D) \otimes I_1 \otimes \dots \otimes I_n) \neq 0$, deoarece $\dim H^0(O_X(D)) > 3n$ prin ipoteză, iar $\dim \bigoplus_{i=1}^n k(x_i)^3 = 3n$. Fie deci s o secțiune nenulă din $H^0(O_X(D) \otimes I_1 \otimes \dots \otimes I_n)$. Atunci $D' = \text{div}_X(s)$ satisface condițiile cerute. Q.E.D.

(13.7) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață minimală cu $q=0$ și fie C o curbă rațională pe X astfel încât $(K \cdot C) < 0$ și $|K + C| = \emptyset$. Atunci X este sau o suprafață geometric riglată peste P^1 , sau este izomorfă cu P^2 . Morfismul de riglare este de forma $\varphi_{|C|}$ unde C este o curbă rațională pe X astfel încât $(K \cdot C) < 0$ și $|K + C| = \emptyset$.

Demonstrație. Deoarece X este minimală și $(K \cdot C) < 0$, $(C^2) \geq 0$. Fie

$$a = \min \{(C^2) \mid C \text{ rațională}, (C^2) \geq 0 \text{ și } |K + C| = \emptyset\}.$$

Dacă notăm prin \mathcal{C} mulțimea tuturor curbelor (integre) raționale cu $(C^2) = a$ și $|K + C| = \emptyset$, și dacă H este o secțiune hiperplană pe X , fie

$$b = \min \{(C \cdot H) \mid C \in \mathcal{C}\}.$$

Fixăm o curbă $C \in \mathcal{C}$ cu $(C \cdot H) = b$. Arătăm că fiecare element al lui $|C|$ este o curbă rațională nesingulară. Fie $D = \sum_{i=1}^r n_i E_i \in |C|$. $n_i \geq 1$, E_i integră și $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$. Avem.

$$0 > (C \cdot K) = (D \cdot K) = \sum_{i=1}^r n_i (K \cdot E_i),$$

de unde $(K \cdot E_i) < 0$ pentru cel puțin un indice i . Cum X este minimală avem atunci $(E_i^2) \geq 0$, și deoarece $|K + D| = |K + C| = \emptyset$, E_i este curbă rațională nesingulară conform lui (13.5) i) avînd proprietatea $|K + E_i| = \emptyset$. Rezultă $(E_i^2) \geq a$ și în plus avem:

$$\begin{aligned} a = (D^2) &= \sum_{j=1}^r n_j (C \cdot E_j) \geq n_i (C \cdot E_i) = n_i \sum_{h=1}^r n_h (E_h \cdot E_i) \geq \\ &\geq n_i^2 (E_i^2) \geq n_i^2 a. \end{aligned}$$

Deducem $n_i = 1$ și $E_i \in \mathcal{C}$. De asemenea avem:

$$(H \cdot E_i) \geq b = (H \cdot C) = (H \cdot E_i) + \sum_{h \neq i} n_h (H \cdot E_h).$$

Deoarece $(H \cdot E_h) > 0$ pentru orice h , rezultă $r = 1$, deci $D = E_i$. Altfel spus, am arătat că fiecare $D \in |C|$ este curbă rațională nesingulară. Ținînd cont de (13.6) avem $\dim |C| \leq 2$.

Din şirul exact

$$0 \rightarrow O_X \rightarrow O_X(C) \rightarrow O_X(C) \otimes O_C \rightarrow 0$$

deducem şirul exact de coomologie

$$0 \rightarrow H^0(O_X) \rightarrow H^0(O_X(C)) \rightarrow H^0(O_X(C) \otimes O_C) \rightarrow H^1(O_X) = 0.$$

Cum $\deg_C(O_X(C) \otimes O_C) = (C^2)$ şi $C \cong P^1$, avem $\dim H^0(O_X(C) \otimes O_C) = 1 + (C^2)$, de unde $\dim H^0(O_X(C)) = 2 + (C^2)$, sau încă $\dim |C| = 1 + (C^2)$. Cum am văzut că $\dim |C| \leq 2$ şi cum $(C^2) \geq 0$, avem două posibilităţi: $(C^2) = 0$ sau $(C^2) = 1$. Totodată observăm că în ambele cazuri sistemul linear complet $|C|$ nu are puncte bază.

Cazul $(C^2) = 0$. Atunci $\dim |C| = 1$ şi deci $\varphi_{|C|}: X \rightarrow |C| = P^1$ are drept fibre elementele lui $|C|$, care sînt curbe raţionale nesingulare. Deci X este o suprafaţă geometric riglată de bază P^1 .

Cazul $(C^2) = 1$. Fie D o curbă integră oarecare pe X şi $x \in D$ un punct. Deoarece $\dim |C| = 2$, există o curbă $C' \in |C|$ astfel încît $x \in C'$. Dacă $C' = D$, avem $(C \cdot D) = (C \cdot C') = 1 > 0$, iar dacă $C' \neq D$, atunci din nou $(C \cdot D) = (C' \cdot D) > 0$. Rezultă că morfismul $\varphi_{|C|}: X \rightarrow P^2$ este un morfism finit (şi surjectiv). Cum C este imaginea inversă prin $\varphi_{|C|}$ a unei drepte din P^2 şi $(C^2) = 1$, rezultă că $\varphi_{|C|}$ este un izomorfism. Q.E.D.

(13.8) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafaţă minimală cu $c(X) = -1$, $q > 0$ şi cu proprietatea că prin fiecare punct $x \in X$ trece o curbă C raţională şi nesingulară. Atunci X este o suprafaţă geometric riglată (deci X este riglată) via morfismul $f: X \rightarrow B$ dedus din factorizarea Stein a morfismului Albanese $\alpha: X \rightarrow \text{Alb}(X)$.

Demonstraţie. Condiţia $c(X) = -1$ implică $p_g = 0$, şi din (5.3) avem $\dim \text{Alb}(X) = q > 0$. Cum $\alpha(X)$ nu poate fi un punct (atunci $\alpha(X)$ nu ar mai genera pe $\text{Alb}(X)$), $\dim \alpha(X) \geq 1$. Dacă $x \in X$ este un punct închis şi C este o curbă raţională şi nesingulară ce trece prin x , atunci $\alpha(C)$ este un punct şi deci $\dim \alpha^{-1}(\alpha(x)) = 1$. Prin urmare $\dim \alpha(X) = 1$, şi deci normalizata B a curbei $\alpha(X)$ în corpul funcţiilor raţionale $k(X)$ este curbă proiectivă şi nesingulară. Dacă $f: X \rightarrow B$ este morfismul dedus din α via factorizarea Stein, atunci $f(C)$ este un punct pentru orice curbă raţională şi nesingulară C de pe X . Cum fibra generală a morfismului f este integră (cf. (7.3)), rezultă în ipotezele noastre că fibra generală a lui f este o curbă raţională nesingulară. Din (12.2) deducem că f este o riglare geometrică deoarece X este o suprafaţă minimală. Acest

fapt (anume că f este riglare geometrică) se poate deduce însă și direct în felul următor : Dacă $D = \sum_{i=1}^r n_i E_i$ este o fibră a lui f , cu $n_i \geq 1$, E_i curbă integră și $E_i \neq E_j$ pentru $i \neq j$, atunci avem $(D^2) = 0$ și $(K \cdot D) = -2$ deoarece $p_a(D) = 0$. Dacă $r > 1$, atunci $(E_i^2) < 0$ (cf. (2.6)), și cum X este minimală, $(K \cdot E_i) \geq 0$ pentru orice i , de unde $(K \cdot D) \geq 0$, absurd. Deci $r = 1$, adică $D = nE$, cu $n \geq 1$ și E curbă integră. Însă $-2 = (K \cdot D) = n(K \cdot E)$, de unde, dacă $n \geq 2$, $(K \cdot E) = -1$. Cum însă $(E^2) = 0$, acest lucru nu este posibil ținând cont de formula genului. Q.E.D.

(13.9) LEMĂ. Dacă X este o suprafață minimală cu $c(X) = -1$ există o secțiune hiperplană H pe X astfel încît $(K \cdot H) < 0$.

Demonstrație. Fie C o curbă integră pe X astfel încît $(K \cdot C) < 0$. Deoarece X este minimală avem $(C^2) \geq 0$. Fie H_1 o secțiune hiperplană pe X . Pentru orice $n \geq 0$ divizorul $nC + H_1$ este amplu deoarece :

$$((nC + H_1)^2) = n^2(C^2) + 2n(C \cdot H_1) + (H_1^2) \geq (H_1^2) > 0 \text{ și}$$

$$(nC + H_1 \cdot D) = n(C \cdot D) + (H_1 \cdot D) \geq (H_1 \cdot D) > 0$$

pentru orice curbă integră D de pe X și afirmația rezultă din criteriul Nakai-Moishezon (cf. (1.25)). Acum observăm că pentru orice $n \geq 0$ avem $(K \cdot nC + H_1) < 0$. Q.E.D.

Vom analiza acum suprafețele minimale X cu $(K^2) \leq 0$ și $c(X) = -1$.

(13.10) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață minimală cu $c(X) = -1$ și $(K^2) \leq 0$. Atunci pentru orice $n \geq 0$ există un divizor $D \in \text{Div}(X)$ astfel încît $|D + K| \neq \emptyset$, $(D \cdot K) < 0$ și $\dim |D| \geq n$.

Demonstrație. După (13.9) există o secțiune hiperplană H pe X astfel încît $(K \cdot H) < -2n - 2q$. Din (13.1) și $c(X) = -1$ rezultă că adjuncția pe X se termină. Deci există un $m \geq 0$ astfel încît $|H + mK| \neq \emptyset$ și $|H + (m+1)K| = \emptyset$. Fie $D' \in |H + mK|$. Nu putem avea $D' = 0$ deoarece atunci $H \sim -mK$ și deci $(H^2) = -m^2(K^2) \leq 0$, absurd. Deci $D' > 0$. Descompunem pe D' în $D' = D + D''$, cu D (resp. D'') partea lui D' ce conține toate componentele E ale lui D' cu proprietatea $(K \cdot E) < 0$ (resp. cu $(K \cdot E) \geq 0$). Cum

$|K - D| \subseteq |K| = \emptyset$, avem după teorema Riemann-Roch :

$$\begin{aligned} \dim |D| &\geq 1/2(D^2) - 1/2(D \cdot K) - q \geq 1/2(D^2) - 1/2(D + D'' \cdot K) - \\ &- q = 1/2(D^2) - 1/2(D' \cdot K) - q = 1/2(D^2) - 1/2(H \cdot K) - \\ &- 1/2m(K^2) - q \geq 1/2(D^2) - 1/2(H \cdot K) - q \geq -1/2(H \cdot K) - \\ &- q \geq (n + q) - q = n. \end{aligned}$$

(Am folosit faptul că $(D'' \cdot K) \geq 0$, $(K^2) \leq 0$, și dacă E este o componentă a lui D , atunci $(E^2) \geq 0$ (deoarece X este minimală și $(K \cdot E) < 0$), de unde $(D^2) \geq 0$.)

Cum $D \neq 0$ avem $(K \cdot D) < 0$. De asemenea, cum $|K + D| \subseteq |K + D'| = |H + (m + 1)K| = \emptyset$, demonstrația propoziției (13.10) este completă.

(13.11) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață minimală cu $p_2 = q = 0$. Atunci $c(X) = -1$. Dacă în plus $(K^2) \leq 0$, atunci există pe X o curbă rațională și nesingulară C astfel încât $(K \cdot C) < 0$ și $|K + C| = \emptyset$. În particular, X este rațională în acest ultim caz.

Demonstrație. Dacă $(K^2) < 0$ avem $c(X) = -1$. Într-adevăr, dacă ar exista un $D \in |nK|$ pentru un $n \geq 1$, atunci $(K \cdot D) = n(K^2) < 0$, și deci după (13.1), $c(X) = -1$. Presupunem acum $(K^2) \geq 0$, și $p_2 = q = 0$. După teorema Riemann-Roch avem

$$\dim |-K| + \dim |2K| \geq (K^2) - 1,$$

și cum $\dim |2K| = -1$ ($p_2 = 0$), avem $\dim |-K| \geq (K^2) \geq 0$. Există deci un $D \in |-K|$. Cum $D > 0$ (dacă $D = 0$, atunci $K \sim 0$ și deci $p_g = 1$, absurd), atunci pentru fiecare divizor $D' \in \text{Div}(X)$ există un $n_D \geq 1$ astfel încât $|D' + nK| = |D' - nD| = \emptyset$ pentru orice $n \geq n_D$ (vezi (7.11.3)). Altfel spus, adjuncția pe X se termină și după (13.1), $c(X) = -1$.

Presupunem acum $(K^2) \leq 0$. După (13.10) există un divizor efectiv E pe X astfel încât $(K \cdot E) < 0$ și $|K + E| = \emptyset$. Atunci o componentă C a lui E are încă proprietatea $(K \cdot C) < 0$. În plus, $|K + C| \subseteq |K + E| = \emptyset$, și deci avem și $|K + C| = \emptyset$. După (13.5) i) $p_a(C) \leq q = 0$, și deci C este curbă rațională nesingulară. Ultima afirmație rezultă din (13.7) și (11.10). Q.E.D.

(13.12) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață minimală cu $p_g = 0$ și $q > 0$. Atunci $(K^2) \leq 0$, iar dacă $q > 1$ atunci $(K^2) < 0$.

Demonstrație. Deoarece $p_g = 0$ formula lui Noether se scrie ținând cont de (5.1):

$$10 - 8q = (K^2) + b_2.$$

Dacă $q > 1$, atunci rezultă $(K^2) < 0$, iar dacă $q = 1$, avem $2 = (K^2) + b_2$. Este deci suficient să arătăm că $b_2 \geq 2$. Însă după (5.3) $\dim \text{Alb}(X) = 1$, și deci morfismul Albanese nu poate fi constant. Rezultă că X este o fibrare peste $\text{Alb}(X)$. Din (8.7) și inegalitatea Igusa-Severi rezultă atunci $b_2 \geq 2$. Q.E.D.

(13.13) PROPOZIȚIE. Fie X o suprafață minimală cu $q > 0$. Atunci $c(X) = -1$ dacă și numai dacă X este o suprafață geometric riglată.

Demonstrație. Dacă X este riglată, atunci $c(X) = -1$ după (11.15). Presupunem deci X suprafață minimală cu $q > 0$ și $c(X) = -1$. Ținând cont de (13.8) este suficient să arătăm că prin fiecare punct $x \in X$ trece o curbă rațională nesingulară. Presupunem prin absurd că acest lucru nu se realizează. Atunci pe X există cel mult un număr finit de curbe raționale nesingulare. Într-adevăr, fie $f: X \rightarrow B$ morfismul dedus din factorizarea Stein a morfismului Albanese $\alpha: X \rightarrow \text{Alb}(X)$ (vezi demonstrația lui (13.8)). Dacă pe X ar exista o infinitate de curbe raționale nesingulare, atunci fiecare dintre acestea ar fi conținută în câte una din fibrele lui f . Deci există o infinitate de puncte $b \in B$ cu $\dim f^{-1}(b) = 1$. Rezultă că B nu poate fi suprafață, deci B este curbă nesingulară. Cum fibra generală a lui f este integră și cum o infinitate de fibre ale lui f conțin câte o curbă rațională nesingulară, rezultă că una din fibrele lui f este curbă rațională nesingulară. Din demonstrația lui (13.8) rezultă atunci că toate fibrele lui f sînt raționale și nesingulare, ceea ce noi am exclus.

Fixînd acum o scufundare proiectivă $X \hookrightarrow P^n$ a lui X , există cel mult un număr finit de curbe integrale E pe X de grad dat d și astfel încît $H^0(N_E) = 0$, cu N_E fasciculul normal al lui E în X . Într-adevăr, dacă $C(d)$ este schema lui Hilbert a tuturor curbelor de grad d de pe X , și dacă $e \in C(d)$ este punctul (închis) din $C(d)$ corespunzător curbei E , atunci $H^0(N_E)$ se identifică cu spațiul tangent la $C(d)$ în punctul e (vezi Mumford [1]), și deci e este un punct izolat al lui $C(d)$. Cum însă $C(d)$ este o schemă proiectivă (*loc. cit*) există cel mult un număr finit de puncte izolate ale lui $C(d)$, și deci X conține un număr finit de curbe integrale E cu $H^0(N_E) = 0$. În particular, există doar un număr finit de curbe nesingulare E de grad d avînd una din proprietățile:

a) $(E^2) < 0$, sau

b) E este curbă eliptică, $(E^2) = 0$ și $N_E \not\cong \mathcal{O}_E$.

Fie atunci \mathcal{F} mulțimea tuturor curbelor neregulate E de pe X care sînt sau raționale, sau cu una din proprietățile a) sau b) de mai sus. Vom demonstra mai întîi propoziția (13.13) în ipoteza suplimentară că corpul de bază k este (algebric închis și) nenumărabil. Fie atunci $d = \deg(X)$ în raport cu scufundarea fixată mai sus. Deoarece \mathcal{F} conține cel mult un număr finit de curbe de grad d , un hiperplan general H din P^n taie pe X după o curbă C neregulară și conexă (după teorema lui Bertini) care nu aparține lui \mathcal{F} . Cum \mathcal{F} este o mulțime nenumărabilă și C nenumărabilă (deoarece am presupus k nenumărabil), mulțimea $C - \bigcup_{E \in \mathcal{F}} (C \cap E)$ este infinită, de unde rezultă că $X - \bigcup_{E \in \mathcal{F}} E$ este o mulțime infinită.

Fie atunci x_1, \dots, x_q (q este irregularitatea lui X) q puncte distincte din $X - \bigcup_{E \in \mathcal{F}} E$. După (13.12), $(K^2) \leq 0$, și deci după (13.10), există un divisor efectiv $D' \in \text{Div}(X)$ astfel încît $(K \cdot D') < 0$, $|D' + K| = \emptyset$ și $\dim |D| \geq 3q$. Atunci după (13.6) există un divisor $D = \sum_{i=1}^r n_i E_i \in |D'|$, cu $n_i \geq 1$, E_i curbe integrale cu $E_i \neq E_j$ dacă $i \neq j$, astfel încît D conține fiecare x_h , $h = 1, \dots, q$, ca punct multiplu. Fie i_h un indice cu proprietatea că $x_h \in E_{i_h}$. Atunci E_{i_h} nu aparține lui \mathcal{F} și deci după (13.5) iii) avem în mod necesar $n_{i_h} = 1$, și cum E_{i_h} este neregulară (cf. (13.4)), rezultă că x_h se află la intersecția a cel puțin două componente ale lui D cu coeficient 1.

Însă observăm că dacă din D se scot un număr oarecare de componente astfel încît să se obțină un divisor efectiv D' , atunci avem $|K + D'| \subseteq |K + D| = \emptyset$, deci după (13.5) ii), D' rămîne cu suportul conex. De aici rezultă că dacă $q \geq 2$, atunci scoțînd o componentă F_j dintr-un drum F_1, \dots, F_n ce unește pe x_1 cu x_2 (vezi figura 13), vom disconecta pe D (deoarece D ne reprezentînd

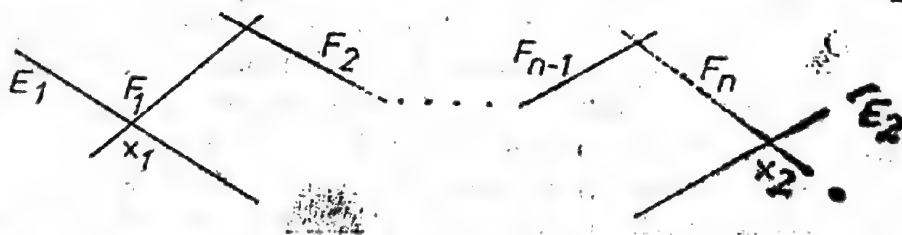


Figura 13

bucle, nu mai există un al doilea drum ce leagă x_1 de x_2). Deci dacă $q \geq 2$ sîntem conduși la o absurditate.

Dacă $q = 1$ și E_1 și E_2 sînt două componente ale lui D ce trec prin punctul x_1 , după (13.5) i) avem :

$$q = 1 \geq p_a(E_1) + p_a(E_2),$$

ceea ce este din nou absurd deoarece E_1 și E_2 neaparținînd lui \mathcal{F} avem $p_a(E_1) \geq 1$ și $p_a(E_2) \geq 1$.

Propoziția (13.13) este deci demonstrată în cazul cînd corpul k nu este numărabil. Mai exact, am demonstrat în acest caz că morfismul $f: X \rightarrow B$ dedus din morfismul Albanese $\alpha: X \rightarrow \text{Alb}(X)$ via factorizarea Stein este o riglare geometrică.

Dacă corpul k este numărabil, fie $k \hookrightarrow k'$ o extindere a lui k astfel încît k' să fie algebric închis și nenumărabil. Fie $X' = X \otimes_k k'$. Atunci este clar că $c(X') = -1$ și $q(X') = q(X) > 0$. Din cele demonstrate mai sus rezultă că morfismul $f': X' \rightarrow B'$ obținut din morfismul Albanese $\alpha': X' \rightarrow \text{Alb}(X')$ via factorizarea Stein, are fibra generală izomorfă cu P_k^1 . Este imediat de verificat că $B' = B \otimes_k k'$ și $f' = f \otimes_k k'$. Fie F_b o fibră integră a lui f peste un punct închis $b \in B$ și fie $b' \in B'$ un punct închis astfel încît $v(b') = b$. Rezultă atunci că fibra $f'^{-1}(b')$ este izomorfă (peste k') cu $F_b \otimes_k k'$, și deci $f'^{-1}(b')$ este o curbă integră de gen aritmetic zero. Atunci F_b este integră de gen aritmetic zero, adică $F_b \cong P_k^1$. Cum X este minimală, f este atunci o riglare geometrică (vezi demonstrația lui (13.8) pentru a arăta că toate fibrele lui f sînt integrale, și deci fiecare izomorfă cu P_k^1). Q.E.D.

(13.14) *Observații.* a) Demonstrația propoziției (13.13) oferă o altă cale (mai complicată) de a proba punctul b) al teoremei (12.2).

b) Dacă X este o suprafață minimală cu $p_g = 0$ și $q \geq 2$, atunci X este suprafață riglată. Într-adevăr, după (13.12) $(K^2) < 0$, iar după (1.25) avem $c(X) = -1$. Afirmția este o consecință a propoziției (13.13).

c) Propozițiile (13.11) și (13.13) reduc demonstrația teoremei (13.2) la teorema (13.3) cu ipoteza suplimentară $(K^2) > 0$.

(13.15) Trecem acum la demonstrația teoremei (13.3) în cazul $(K^2) > 0$. Demonstrația acestei teoreme în cazul $(K^2) > 0$ este mult mai delicată decît în cazul $(K^2) \leq 0$.

Observăm mai întîi că dacă ar exista un divizor efectiv D astfel încît $(K \cdot D) < 0$ și $|K + D| = \emptyset$, atunci o componentă C a lui D ar avea aceleași proprietăți: $(K \cdot C) < 0$ și $|K + C| = \emptyset$. Din] (13.5) i) rezultă atunci că $p_a(C) \leq q = 0$, și deci C este o curbă rațională nesingulară. Atunci raționalitatea suprafeței X rezultă din (13.7).

Rămîne de analizat cazul în care pentru orice divizor efectiv D astfel încît $|K + D| = \emptyset$, atunci $(K \cdot D) \geq 0$.

(13.16) LEMĂ. Dacă X este o suprafață minimală astfel încât $(K^2) > 0$, $p_2 = 0$, $q = 0$ și pentru orice divizor efectiv D cu proprietatea $|K + D| = \emptyset$ avem $(K \cdot D) \geq 0$, atunci:

- $\text{Pic}(X)$ este generat de $\omega_X = O_X(K)$ și $O_X(-K)$ este amplu.
- Fiecare $D \in |-K|$ este o curbă integră cu $p_a(D) = 1$.
- $(K^2) \leq 5$ și $b_2 \geq 5$.

Demonstrație. Arătăm mai întâi că orice $D \in |-K|$ este o curbă ireductibilă. Presupunem prin absurd că ar exista un $D \in |-K|$ reductibil. Avem $D > 0$ și $(K \cdot D) = -(K^2) < 0$. Atunci o componentă C a lui D are proprietatea $(K \cdot C) < 0$. Observăm că $|K + C| = \emptyset$; într-adevăr, dacă ar exista un $\Delta \in |K + C|$, atunci $0 < D - C + \Delta \in |K + C + D - C| = |K + D| = |0|$, ceea ce este o absurditate. Însă situația $|K + C| = \emptyset$ și $(K \cdot C) < 0$ nu este posibilă ținând cont de ipotezele lemei. În plus avem

$$p_a(D) = 1/2(D^2) + 1/2(D \cdot K) + 1 = 1/2(K^2) - 1/2(K^2) + 1 = 1.$$

Arătăm acum că orice divizor $D \geq 0$ astfel încât $|K + D| = \emptyset$ este în mod necesar nul. Într-adevăr, dacă $D > 0$ și $|K + D| = \emptyset$, există un $C \in |-K|$ astfel încât $D \cap C \neq \emptyset$ ($\dim |-K| \geq (K^2) \geq 1$, și cum sistemul linear $|-K|$ nu are componente fixe, aplicația rațională $\varphi_{|-K|}$ este definită în complementara unui număr finit de puncte. Fie $x \in D$; dacă x este punct bază pentru $|-K|$, atunci $D \cap C$ conține pe x pentru orice $C \in |-K|$, iar dacă x nu este punct bază pentru $|-K|$, atunci $D \cap C$ conține pe x , unde $C = \varphi_{|-K|}^{-1}(H)$, cu H hiperplan din $|-K|$ ce trece prin punctul $\varphi_{|-K|}(x)$. Atunci $(K \cdot D) = -(C \cdot D) < 0$, deoarece $(C^2) = (K^2) > 0$ și $D \cap C \neq \emptyset$. Însă $(K \cdot D) < 0$ și $|K + D| = \emptyset$ contrazic din nou ipotezele lemei și afirmația este dovedită.

După (13.11) $c(X) = -1$, iar după (13.1) adjuncția pe X se termină. Aceasta înseamnă că pentru orice divizor $\Delta \in \text{Div}(X)$ există un întreg n astfel încât $|\Delta + nK| \neq \emptyset$ și $|\Delta + (n+1)K| = \emptyset$. Dacă $D \in |\Delta + nK|$, avem $|K + D| = \emptyset$, și deci $D = 0$ după cele arătate mai sus. Altfel spus, $\Delta \sim -nK$, de unde rezultă că $\text{Pic}(X)$ este generat de $\omega_X = O_X(K)$.

În plus, deoarece $c(X) = -1$, avem $H^0(O_X(nK)) = 0$ pentru orice $n \geq 1$. Cum X este suprafață proiectivă și $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \omega_X$, rezultă că pentru orice $n \geq 0$, $O_X(-nK)$ este foarte amplu, și deci $O_X(-K)$ este amplu. În acest fel punctul a) este dovedit.

Ca să demonstrăm punctul b) rămâne de arătat că orice $D \in |-K|$ este redus. Fie pentru aceasta $D = m D_{\text{red}}$, cu $m \geq 1$. Din a) rezultă că există un întreg m' astfel încât $D_{\text{red}} \sim m' D$. Atunci

$D \sim mm'D$, și cum $D > 0$ și X este suprafață proiectivă, avem $mm' = 1$. Deci $m = 1$, adică $D = D_{\text{red}}$.

În fine, dacă prin absurd $(K^2) \geq 6$, avem $\dim | -K| \geq (K^2) \geq 6$. Fie x_1 și x_2 două puncte distincte pe X . După (13.6) există $C \in | -K|$ care să aibă pe x_1 și x_2 drept puncte multiple. Însă după b), C este curbă integră cu $p_a(C) = 1$, fapt ce contrazice ultima afirmație. Deci $(K^2) \leq 5$. Din formula lui Noether $10 = (K^2) + b_2$ rezultă $b_2 \geq 5$. Q.E.D.

Ca să încheiem demonstrația teoremei (13.3) va fi suficient să probăm următoarea leamnă fundamentală:

(13.17) LEMĂ. *Nu există suprafețe cu $q = 0$ și cu proprietățile a), b) și c) din lema (13.16).*

Observăm mai întâi că proprietatea a) din (13.16) implică faptul că suprafața X este minimală, $(K^2) > 0$ și $p_n = 0$ pentru orice $n \geq 1$. Demonstrăm mai întâi (13.17) în cazul când k este de caracteristică zero, în care caz are loc următorul enunț mai precis.

(13.18) LEMĂ. *Dacă k este un corp algebric închis de caracteristică zero, atunci nu există suprafețe X cu $q = 0$ și cu proprietățile a) și c) din lema (13.16).*

Demonstrație. Utilizînd principiul lui Lefschetz (vezi Bucur [2], pag. 124) este suficient să presupunem $k = \mathbb{C}$, corpul numerelor complexe. Atunci, punîndu-ne de acord cu Serre [2], pentru orice \mathcal{O}_X -modul coerent F notăm prin F^n fasciculul analitic coerent asociat lui F . Atunci șirul exact exponențial

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_X^h \rightarrow (\mathcal{O}_X^h)^* \rightarrow 1$$

induce șirul exact de coomologie

$$H^1(\mathcal{O}_X^h) \rightarrow H^1((\mathcal{O}_X^h)^*) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X^h).$$

După Serre [2] avem $H^i(\mathcal{O}_X^h) \cong H^i(\mathcal{O}_X) \quad \forall i$ și $H^1((\mathcal{O}_X^h)^*) \cong H^1(\mathcal{O}_X^*) = \text{Pic}(X)$. Cum $q = p_g = 0$, deducem că $\text{Pic}(X) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$, de unde $b_2 = \text{rang } H^2(X, \mathbb{Z}) = \text{rang } \text{Pic}(X) = 1$ (condiția a) din lema (13.16)), ceea ce contrazice condiția c) din aceeași leamnă Q.E.D.

(13.19) *Observație.* Demonstrația criteriului lui Castelnuovo în caracteristică zero oferă în acest caz o nouă demonstrație pentru teorema (12.8). Într-adevăr, fie X o suprafață minimală rațională. Atunci $p_2 = q = 0$. După (13.11) și demonstrația criteriului lui Castelnuovo în cazul $(K^2) > 0$ și $\text{car}(k) = 0$, există o curbă rațională neregulară cu proprietățile $(K \cdot C) < 0$ și $|K + C| = \emptyset$. După



(13.7), X este atunci izomorfă fie cu P^2 , fie cu o suprafață geometric riglată peste P^1 (deci cu una din suprafețele X_n , $n \geq 0$ și $n \neq 1$ cf. (12.5)).

Cu toate acestea am preferat să prezentăm și demonstrația dată teoremei (12.8) în § 12, care, deși mai lungă, are avantajul că este elementară, nu depinde de clasificarea suprafețelor și merge în orice caracteristică.

Trecem acum la demonstrația lemei (13.17) (și deci a criteriului lui Castelnuovo) în caracteristică $p > 0$. Ideea este de a reduce demonstrația la caracteristică zero.

(13.20) LEMĂ. Fie X o suprafață cu $q = 0$ și cu proprietățile a), b), și c) din lema (13.16). Atunci există o curbă nesingulară $D \in |-K|$.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că toate curbele sistemului linear complet $|-K|$ sînt singulare. Deoarece pentru orice $D \in |-K|$, D este integră și $p_a(D) = 1$, D este curbă rațională cu o singură singularitate, care este: fie punct cuspidal ordinar, fie punct dublu cu tangente distincte (vezi demonstrația lui (7.18), sau Serre [3], cap. IV). Fie $L \subseteq |-K|$ un subsistem linear de dimensiune 1 (într-adevăr, avem $\dim |-K| \geq (K^2) \geq 1$). Atunci aplicația rațională $\varphi = \varphi_L: X \rightarrow L = P^1$ are drept fibre exact curbele aparținînd lui L , deoarece L nu are componente fixe (toate curbele din L sînt integrale). Fie Y mulțimea tuturor singularităților curbelor aparținînd lui L și $x \in X$ un punct bază al lui L . Atunci $x \notin Y$.

Într-adevăr, dacă prin absurd $x \in Y$, atunci fie $D \in L$ o curbă ce conține pe x drept punct singular și $u_1: X_1 \rightarrow X$ transformarea pătratică a lui X de centru x . Atunci transformata proprie D' a curbei D prin u_1 este o curbă rațională nesingulară, care se identifică cu una din fibrele aplicației raționale $\varphi_1 = \varphi \circ u_1: X_1 \rightarrow P^1$. Cum după cel mult (K^2) transformări pătratice obținem o suprafață \tilde{X} astfel încît $\tilde{\varphi} = \varphi \circ u$ (u fiind compunerea acestor transformări pătratice) să fie morfism, rezultă că una din fibrele lui $\tilde{\varphi}$ este curbă rațională nesingulară. Din (11.10) deducem că \tilde{X} (și deci și X) este suprafață rațională. Însă după teorema (12.8) nu există modele minimale X de suprafețe raționale cu proprietatea $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \omega_X$.

Am demonstrat deci că Y nu conține nici un punct bază al lui L . Fie atunci $u: \tilde{X} \rightarrow X$ o compunere de un număr minim de transformări pătratice astfel încît $\tilde{\varphi} = \varphi \circ u$ să devină morfism. Atunci $\tilde{\varphi}: \tilde{X} \rightarrow P^1$ este o fibrare cvasieliptică avînd toate fibrele curbe integrale, raționale și cu cîte o singură singularitate. Din (7.18) deducem că fiecare asemenea singularitate este punct cuspidal ordinar, și că această situație poate apărea numai în caracteristică 2 sau 3.

Fie \tilde{Y} locul geometric al tuturor singularităților fibrelor lui $\tilde{\varphi}$. Dacă $\text{car}(k) = 3$, din demonstrația lui (7.18) rezultă că \tilde{Y} este o curbă nesesingulară și ireductibilă și că restricția $\tilde{\varphi}/\tilde{Y}: \tilde{Y} \rightarrow P^1$ este un morfism bijectiv pur neseseparabil de grad $p = 3$. O concluzie asemănătoare este valabilă și dacă $\text{car}(k) = 2$.

Într-adevăr, punându-ne de acord cu notațiile din demonstrația teoremei (7.18) (cu $f = \tilde{\varphi}$ și $B = P^1$), avem

$$f(u, v) = U(u, v) \cdot (u^2 + v^3), \quad U(u, v) \in k[[u, v]], \quad U(0, 0) \neq 0.$$

Se observă că $\partial f / \partial v(0, v) = U(0, 0) v^2 + \text{termeni de grad} > 2$; deci după teorema de preparare a lui Weierstrass avem:

$$\partial f / \partial v(u, v) = V(u, v) \cdot (v^2 + R_1(u) v + R_2(u)),$$

cu $V(0, 0) \neq 0$ și $R_1(u)$ și $R_2(u)$ serii neinvertibile din $k[[u]]$. Se observă imediat că $R_1(u) = 0$. Afirmăm că coeficienții puterilor de grad impar ale lui u din seria $R_2(u)$ sînt nuli.

Într-adevăr, în caz contrar, observăm că, deoarece \tilde{Y} este o curbă și seria $v^2 + R_2(u)$ este ireductibilă în acest caz, $v^2 + R_2(u)$ divide seria $\partial f / \partial u$ (\tilde{Y} fiind exact mulțimea punctelor lui X în care $f = \tilde{\varphi}$ nu este morfism neted). Se observă însă imediat că acest ultim fapt este imposibil.

Am demonstrat deci că dacă $\text{car}(k) = 2$, atunci $\partial f / \partial v = V(u, v) \cdot g^2$, cu $V(0, 0) \neq 0$ și $g \in k[[u, v]]$ serie de ordin 1. Cum $g = 0$ este o ecuație locală pentru \tilde{Y} , atunci \tilde{Y} este o curbă ireductibilă nesesingulară. Cum \tilde{Y} intersectează fiecare fibră F a lui $\tilde{\varphi}$ în cîte un singur punct și $(Y \cdot F) = p = 2$, avem (la fel ca în cazul cînd $\text{car}(k) = 3$) că $\tilde{\varphi}/\tilde{Y}: \tilde{Y} \rightarrow P^1$ este un morfism bijectiv pur neseseparabil, cu \tilde{Y} curbă (ireductibilă) nesesingulară.

Rezultă că dacă $\text{car}(k) = p = 2$ sau 3 , curba \tilde{Y} este rațională nesesingulară. Pe de altă parte, deoarece nici-un punct bază al lui L nu aparține lui Y , rezultă că \tilde{Y} este izomorfă cu Y via morfismul u/\tilde{Y} , și deci Y este de asemenea o curbă (ireductibilă) nesesingulară și rațională.

Folosind acum ipoteza că $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} O_X(D)$, cu $D \in |-K|$, avem $Y \sim mD$ pentru un m întreg. Folosind faptul că X este proiectivă și că Y și D sînt curbe de genuri aritmetice diferite, deducem

că $m \geq 2$. Calculînd genul aritmetic al lui Y cu formula genului, avem :

$$\begin{aligned} p_a(Y) &= p_a(mD) = 1/2(mD \cdot mD) + 1/2(mD \cdot K) + 1 = \\ &= 1/2 m(m-1)(K^2) + 1 > 0. \end{aligned}$$

ceea ce contrazice faptul că $p_a(Y) = 0$. Q.E.D.

(13.21) LEMĂ. Fie X o suprafață cu $q = 0$ și cu proprietățile a), b) și c) din lema (13.6). Atunci $H^2(X, T_X) = 0$, unde $T_X = (\Omega_{X/k}^1)^\vee$ este fasciculul asociat fibrării tangente a lui X .

Demonstrație. După (13.20) există o curbă eliptică nesaringulară $D \in |-K|$. Considerăm atunci șirul exact :

$$0 \rightarrow O_X((n-1)D) \otimes T_X \rightarrow O_X(nD) \otimes T_X \rightarrow O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D \rightarrow 0 \quad (n \geq 0),$$

care induce șirul exact de coomologie :

$$H^1(O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D) \rightarrow H^2(O_X((n-1)D) \otimes T_X) \rightarrow H^2(O_X(nD) \otimes T_X).$$

Din proprietatea a) a lemei (13.16) rezultă că D este un divizor amplu pe X , deci după o teoremă a lui Serre [1] sau EGA III 2.2.2, avem $H^2(O_X(nD) \otimes T_X) = 0$ pentru $n \geq 0$. Deci pentru anularea lui $H^2(X, T_X)$ va fi suficient să arătăm că $H^1(O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D) = 0$ pentru orice $n \geq 1$.

În acest scop scriem șirul exact canonic :

$$0 \rightarrow T_D \rightarrow T_X \otimes O_D \rightarrow N = O_X(D) \otimes O_D \rightarrow 0.$$

care, prin tensorizare cu $O_X(nD)$ și ținînd cont că $T_D \cong O_D$ (D fiind curbă eliptică), induce șirul exact de coomologie :

$$H^1(O_X(nD) \otimes O_D) \rightarrow H^1(O_X(nD) \otimes T_X \otimes O_D) \rightarrow H^1(O_X(nD) \otimes N).$$

Aplicînd teorema Riemann-Roch pe D și ținînd cont că $(D^2) > 0$, obținem $H^1(O_X(nD) \otimes O_D) = H^1(O_X(nD) \otimes N) = 0$, pentru orice $n \geq 1$. Q.E.D.

(13.22) Revenim la demonstrația lemei fundamentale (13.17). Cum această leamnă este deja demonstrată în cazul în care caracteristica lui k este zero, presupunem $\text{car}(k) = p > 0$. Fie atunci $A = W(k)$ inelul vectorilor lui Witt peste corpul k , care este un inel de

valuare discretă, complet, de caracteristică zero, cu idealul maximal m generat de p , și cu corpul rezidual izomorf cu k . Tehnica de demonstrație constă în a ridica pe X la caracteristică zero și a folosi rezultatul deja probat în caracteristică zero. Lema (13.21) afirmă că $H^2(X, T_X) = 0$. Cum în plus X este proiectivă și $H^2(O_X) = 0$, putem aplica teorema 7.3, exposé III din Grothendieck [7] și deducem că există un morfism neted proiectiv $f: U \rightarrow V = \text{Spec}(A)$, a cărui fibră închisă să fie izomorfă cu X . Vom nota prin X' fibra generică a lui f . Atunci X' este o suprafață netedă peste corpul de fracții k' al lui A .

Deoarece fibrele lui f sînt de dimensiune 2, $R^i f_*(O_U) = 0$ pentru orice $i \geq 3$ (cf. EGA III 4.2.2). Utilizînd teoremele de schimbare a bazei (vezi Mumford [2], II, § 5) rezultă că omomorfismul canonic $(R^2 f_*(O_U)) \otimes_A (A/m) \rightarrow H^2(f^{-1}(m), O_U/mO_U) = H^2(X, O_X) = 0$ este un izomorfism. Cu lema lui Nakayama deducem $R^2 f_*(O_U) = 0$. Repetînd același raționament obținem $R^1 f_*(O_U) = 0$, și deci:

$$(13.22.1) \quad H^1(X', O_{X'}) = 0.$$

Fie k'' o închidere algebrică a corpului k' și $\{k'_i\}$ familia tuturor subextinderilor finite $k'_i \supseteq k'$ ale lui k'' . Notăm $X'' = X' \otimes_{k'} k''$ și $T_i = X' \otimes_{k'} k'_i$. Fie A'' închiderea întreagă a lui A în k'' și A_i închiderea întreagă a lui A în k'_i , și fie m'' un ideal maximal al lui A'' care stă peste idealul maximal m al lui A . Notăm cu B'' localizatul $A''_{m''}$, cu $m_i = A_i \cap m''$, cu B_i localizatul $(A_i)_{m_i}$, cu n'' idealul $m'' B''$ și cu $n_i = m_i B_i$. Deoarece $k = A/m$ este corp algebric închis, $B''/n'' = B_i/n_i = k$.

Fie $V_i = \text{Spec}(B_i)$, $U_i = U \otimes_A B_i$ și f_i morfismul $f \otimes_A B_i: U_i \rightarrow V_i$. Deoarece $B_i/n_i = k$, fibra închisă a lui f_i se identifică cu X ; de asemenea fibra generică a lui f_i se identifică cu T_i . În plus, deoarece extinderea $k'_i \supseteq k'$ este finită, B_i este inel de valuare discretă.

Cum subextinderile finite k'_i formează un sistem inductiv a cărui limită inductivă este k'' , familia de O_X -algebre $O_{X'} \otimes_{k'} k'_i$ (împreună cu omomorfismele induse de incluziunile $k'_i \subseteq k'_j$) formează un sistem inductiv a cărui limită inductivă este $O_{X'}$ -algebra $O_{X'} \otimes_{k'} k''$. Cum $T_i = \text{Spec}(O_{X'} \otimes_{k'} k'_i)$ și $X'' = \text{Spec}(O_{X'} \otimes_{k'} k'')$, atunci din EGA IV 8.2.3 rezultă că X'' este limita proiectivă a schemelor T_i . În particular, morfismele canonice $X'' \rightarrow T_i$ induce omomorfismele de grupuri $\text{Pic}(T_i) \rightarrow \text{Pic}(X'')$, de unde rezultă existența omomorfismului canonic de grupuri:

$$a: \lim_{\substack{\longrightarrow \\ i}} \text{Pic}(T_i) \rightarrow \text{Pic}(X'').$$

Teorema 8.5.2 și propoziția 8.5.5. din EGA IV arată că omomorfismul a este un izomorfism.

Pentru un indice i arbitrar vom nota pentru simplitate $V' = V_i$, $U' = U_i$, $f' = f_i$ și $T = T_i$. Cu aceste notații are loc :

(13.23) LEMĂ. *Există un izomorfism de grupuri*

$$b : \text{Pic}(T) \xrightarrow{\sim} \text{Pic}(X)$$

definit în felul următor : fie L un O_T -modul inversibil și fie L_1 un $O_{U'}$ -modul inversibil astfel încît $L_1/T \cong L$. Atunci $b([L]) = [L_1/X]$, unde prin $[M]$ am notat clasa în grupul lui Picard respectiv a modului inversibil M .

Demonstrație. Definiția lui b nu depinde de alegerea prelungirii L_1 a lui L . Într-adevăr, dacă L_2 este un alt $O_{U'}$ -modul inversibil astfel încît $L_2/T \cong L$, atunci $L_1 \otimes L_2^{-1} \cong O_T$. Cum V' este spectrul unui inel de valuare discretă, T este complementara divizorului efectiv X al cărui fibrat normal în U' este trivial. Într-adevăr, dacă t este uniformizant local pentru inelul B_i , atunci X are drept ecuație globală pe U' pe $t = 0$.

Deoarece $L_1 \otimes L_2^{-1}$ este trivial în complementara lui X și deoarece X este ireductibilă, există un întreg m astfel încît $L_1 \otimes L_2^{-1} \cong O_{U'}(mX)$, de unde $L_1 \otimes L_2^{-1}/X \cong O_{U'}(mX)/X \cong O_X$. Deci dacă definiția lui b este posibilă, atunci ea nu depinde de alegerea prelungirii lui L .

Pe de altă parte, este totdeauna posibil să găsim o prelungire L_1 a lui L deoarece schema U' este neregulară (morfismul f' este neted și V' este neregulară). Deci b este corect definit și în plus este clar că b este omomorfism de grupuri.

Rămâne de arătat că b este izomorfism. Fie $\omega_{U'/V'} = \bigwedge^2 (\Omega_{U'/V'}^1)$. Cum $\Omega_{U'/V'}^1$ este local liber de rang 2, $\omega_{U'/V'}$ este un $O_{U'}$ -modul inversibil. Mai mult, $(\omega_{U'/V'})/X \cong \omega_X$ și $(\omega_{U'/V'})/T \cong \omega_T$. Altfel spus, $b([\omega_T]) = [\omega_X]$. Ținînd cont de condiția a) a lemei (13.16), ω_X generează $\text{Pic}(X)$, și deci surjectivitatea lui b este dovedită.

Fie acum $b([L]) = 0$. Dacă L_1 este o prelungire a lui L la U' , atunci are loc șirul exact (ținînd cont că $L_1/X \cong O_X$)

$$0 \rightarrow L_1 \xrightarrow{p} L_1 \rightarrow O_X \rightarrow 0,$$

care induce șirul exact de coomologie :

$$H^0(L_1) \rightarrow H^0(O_X) \rightarrow H^1(L_1) \xrightarrow{p} H^1(L_1) \rightarrow H^1(O_X) = 0.$$

Cum $H^1(L_1)$ este un B_i -modul de tip finit (f' este propriu), șirul exact de mai sus arată în particular că $H^1(L_1) = p \cdot H^1(L_1)$, și deci după lema lui Nakayama, $H^1(L_1) = 0$. Același șir exact arată atunci că există o secțiune $s \in H^0(L_1)$ a cărei restricție la $H^0(O_X)$ să fie secțiunea 1. Ținând cont că f' este morfism propriu și că mulțimea $\{z \in U' \mid s(z) \neq 0\}$ este deschisă în U' , rezultă imediat că $s(z) \neq 0$ pentru orice $z \in U'$; altfel spus $L_1 \cong O_{U'}$, și deci $L \cong O_T$. Q.E.D.

Revenim acum pentru a încheia demonstrația lemei fundamentale (13.17). Observăm că izomorfismele $b_i: \text{Pic}(T_i) \rightarrow \text{Pic}(X)$ date de lema (13.23) sînt compatibile cu omomorfismele sistemului inductiv al grupurilor $\text{Pic}(T_i)$, deducem existența unui izomorfism canonic între $\text{Pic}(X)$ și $\varinjlim \text{Pic}(T_i)$, și cum am văzut că acest ultim

grup se identifică via izomorfismul a cu $\text{Pic}(X'')$, a unui izomorfism canonic între $\text{Pic}(X)$ și $\text{Pic}(X'')$. Din construcția acestui izomorfism rezultă că ω_X este aplicat pe $\omega_{X''}$, și cum $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z} \omega_X$, deducem $\text{Pic}(X'') = \mathbb{Z} \omega_{X''}$. Folosind EGA III 4.7.1 și faptul că $\omega_{U/V}^1/X \cong \omega_X^{-1}$ este amplu pe X rezultă că $\omega_{U/V}^1$ este amplu pe U , și deci $\omega_X^{-1} \cong \omega_{U/V}^1/X'$ este amplu pe X' . Cum amplitudinea se păstrează la schimbarea bazei, am demonstrat că $\omega_{X''}^{-1}$ este amplu pe X'' altfel spus, X'' satisface condiția a) din lema (13.16).

Ținând cont de (13.22.1) avem $H^1(X'', O_{X''}) = H^1(X', O_{X'}) \otimes_{k'} k'' = 0$.

Arătăm acum că X'' satisface și condiția c) din lema (13.16). În acest scop observăm că, deoarece $\omega_{X''}$ este imaginea inversă a lui $\omega_{X'}$ via morfismul canonic $X'' \rightarrow X'$, $(\omega_{X''} \cdot \omega_{X''}) = (\omega_{X'} \cdot \omega_{X'})$. Pe de altă parte, pentru orice întreg m O_U -modulul $\omega_{U/V}^m$ este f -plat, $\omega_{U/V}^m/X' \cong \omega_X^m$, și $\omega_{U/V}^m/X \cong \omega_X^m$. Aplicînd teoremele de schimbare a bazei (cf. Mumford [2], II, § 5) obținem:

$$\chi(X', \omega_X^m) = \chi(X, \omega_X^m) \text{ pentru orice } m.$$

Ținînd cont de definiția indicelui de intersecție, am demonstrat formula $(\omega_{X'} \cdot \omega_{X'}) = (\omega_X \cdot \omega_X)$, sau încă, ținînd cont și de formula de mai sus, $(\omega_{X''} \cdot \omega_{X''}) = (\omega_X \cdot \omega_X) \leq 5$ (X verifică condiția c) din (13.16)). Folosind formula lui Noether obținem și inegalitatea $b_2(X'') \geq 5$.

Rezumînd toată discuția de mai sus, am construit suprafața X'' peste corpul algebric închis de caracteristică zero k'' cu $q(X'') = 0$ și cu proprietățile a) și c) din lema (13.16). Or, acest fapt intră în contradicție cu lema (13.18). În acest mod lema fundamentală (13.17), și prin aceasta teorema (13.3), este complet demonstrată în orice caracteristică.

(13.24) *Observație.* Condiția „ $p_2 = q = 0$ ” din criteriul lui Castelnuovo de raționalitate implică imediat condiția „ $p_g = q = 0$ ”. Ne putem întreba dacă nu cumva suprafețele raționale pot fi caracterizate de această ultimă condiție. Răspunsul este negativ, deoarece suprafețele Enriques (cf. (10.10)) și suprafețele Godeaux (cf. (9.6.2)) satisfac condiția „ $p_g = q = 0$ ” fără a fi însă raționale.

(13.25) *Exemplu.* Cu criteriul de raționalitate al lui Castelnuovo se poate deduce imediat faptul că orice suprafață nesingulară de grad 3 din P^3 este rațională. Într-adevăr, dacă X este o asemenea suprafață, avem $H^1(O_X) = 0$ și $\omega_X = O_X(-1)$, deoarece X este intersecție completă. Rezultă deci $p_2 = q = 0$ și teorema (13.3) implică raționalitatea lui X . Se poate însă demonstra și direct pe cale elementară raționalitatea lui X folosindu-se faptul că X conține o dreaptă din P^3 (care are în mod necesar autointersecția -1 pe X , și deci X nu este model minimal).

(13.26) *DEFINIȚIE.* Fie X o varietate algebrică proiectivă și nesingulară de dimensiune $n \geq 1$. Se spune că X este o varietate *unirațională* dacă există o aplicație rațională $\varphi: P^n \rightarrow X$ dominantă și separabilă.

Este clar că orice varietate rațională (adică birațional izomorfă cu P^n) este rațională. Pe de altă parte, dacă X este o curbă unirațională, atunci formula lui Hurwitz (cf. Hartshorne [1], pag. 301) arată imediat că $X \cong P^1$. În ceea ce privește suprafețele, criteriul lui Castelnuovo implică:

(13.27) *TEOREMĂ.* Orice suprafață unirațională este rațională.

Demonstrație. Fie $\varphi: P^2 \rightarrow X$ o aplicație rațională dominantă și separabilă. Compunând pe φ cu un produs finit convenabil de transformări pătratice, rezultă un morfism surjectiv și separabil $\psi: Y \rightarrow X$, cu Y suprafață rațională. Atunci pentru fiecare $n \geq 1$ morfismul separabil ψ induce aplicația injectivă $\psi^*: \Gamma(X, \omega_X^n) \rightarrow \Gamma(Y, \omega_Y^n)$ (separabilitatea lui ψ intervine de o manieră esențială), și cum $p_n(Y) = 0$, avem $p_n(X) = 0$ pentru orice $n \geq 1$. Pe de altă parte, dacă $\alpha_X: X \rightarrow \text{Alb}(X)$ este morfismul Albanese, avem, după (5.3), $q(X) = \dim \text{Alb}(X)$. Însă $\text{Alb}(X)$ este o varietate abeliană generată de $\alpha_X(X) = (\alpha_X \circ \psi)(Y) = (\text{Alb}(\psi) \circ \alpha_Y)(Y) = 0$. Cum $p_g(X) = 0$ deducem $q(X) = 0$ ținând cont de (5.3). În fine $p_2(X) = q(X) = 0$ implică X rațională după teorema (13.3). Q.E.D.

(13.28) *Observații.* i) Dacă se slăbește noțiunea de uniraționalitate renunțându-se la condiția de separabilitate a lui φ , atunci enunțul teoremei (13.27) nu mai rămâne în general adevărat. Într-adevăr, Zariski a construit exemple de suprafețe uniraționale în sensul mai slab precizat, care nu sînt raționale (cf. Zariski [3]).

ii) Prima demonstrație în caracteristică arbitrară a criteriului de raționalitate al lui Castelnuovo a fost dată de Zariski (cf. Zariski [2], [3]). Ulterior, M. Artin (cf. Bombieri-Husemoller [1]) și H. Kurke [1] au dat demonstrații mai scurte, complet diferite de demonstrația lui Zariski, utilizând coomologie etală în loc de coomologia clasică cu coeficienți întregi, și șirul lui Kummer în loc de șirul exponențial din demonstrația lemei (13.18).

iii) Recent s-a demonstrat că există varietăți unirăționale de dimensiune 3 (anume anumite hipersuprafețe de grad 3 sau 4 în P^4) care nu sînt raționale (cf. Clemens-Griffiths [1] sau Iskovskih-Manin [1]).

(13.29) *Referințe bibliografice.* Demonstrația teoremei (13.2) este prezentată după Mumford [4], iar demonstrația criteriului lui Castelnuovo aparține lui Kodaira (cf. Safarevici și al. [1], sau Bombieri-Husemoller [1], sau Beauville [1]). Demonstrația criteriului lui Castelnuovo în caracteristică pozitivă prezentată aici aparține lui Iskovskih (cf. Iskovskih [1]).

BIBLIOGRAFIE

- S. ABHYANKAR, 1. *On the field of definition of a non-singular transform of an algebraic surface*, Ann. Math., **65**, (1957), 268—281.
- A. ALTMAN, S. KLEIMAN, 1. *Introduction to Grothendieck duality theory*, Springer, Lect. Notes Math. No. 146 (1970).
- M. ARTIN, 1. *Some numerical criteria for contractibility of curves on an algebraic surface*, Amer. J. Math., **84** (1962), 485—496.
2. *On isolated rational singularities of surfaces*, Amer. J. Math., **88** (1966), 129—136.
3. *Algebraization of formal moduli: II. Existence of modifications*, Ann. Math., **91** (1970), 88—136.
- M.F. ATIYAH *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc., **27** (1957), 414—452.
- L. BĂDESCU, 1. *Applications of the Grothendieck duality theory to the study of normal isolated singularities*, Revue Roum. Math. Pur. Appl., **24** (5) (1979), 673—689.
- A. BEAUVILLE, 1. *Surfaces algébriques complexes*, Astérisque, **54** (1978), Soc. Math. France.
- E. BOMBIERI, 1. *Pluricanonical models of surfaces of general type*, Publ. Math. IHES, **42** (1972), 171—220.
- E. BOMBIERI, D. HUSEMOLLER, 1. *Classification and embeddings of surfaces*, Proc. Symp. Pure Math., **29** (1975), 329—420.
- E. BOMBIERI, D. MUMFORD, 1. *Enriques' classification of surfaces in char. p: II*, in volumul *Complex analysis and algebraic geometry* (dedicated to K. Kodaira), Iwanami Shoten Publ., Tokyo, Cambridge Univ. (part. I), 1977.
2. *Enriques' classification of surfaces in char. p: III*, Inv. Math., **35** (1976), 197—232.
- A. BOREL, 1. *Linear algebraic groups*, Benjamin, New York — Amsterdam, 1969.
- A. BOREL, J-P. SERRE, 1. *Le théorème de Riemann-Roch*, Bull. Soc. Math. France, **86** (1958), 97—136.
- I. BUCUR, 1. *Seminar de geometrie algebrică*, Roma, 1970 (nepublicat).
2. *Capitole speciale de algebră*, Editura Academiei, București, 1980.
- C.H. CLEMENS, P. GRIFFITHS, 1. *The intermediate Jacobian of the cubic threefold*, Ann. Math., **95** (1972), 281—356.
- P. DELIGNE și al., 1. *Cohomologie étale* (SGA 4 1/2), Springer Lect. Notes Math. 569 (1977).

- A. GROTHENDIECK, 1. *Sur une note de Mordell-Tate*, J. Reine Angew. Math. (Crelle), **200** (1958), 208—215.
2. *La théorie des classes de Chern*, Bull. Soc. Math. France, **86** (1958), 137—154.
3. *Fondements de la géométrie algébrique* (Extraits du Sémin. Bourbaki 1957—1962), Secret. Paris, 1962.
4. *Local cohomology*, Springer, Lect. Notes Math., **41** (1967).
5. *La classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math., **79** (1957), 121—138.
6. *Séminaire de géométrie algébrique (SGA II)* IHES Paris 1962.
7. *Relevements étales et groupe fondamental (SGA I)*, Springer, Lect. Notes Math., **224** (1971).
- A. GROTHENDIECK și al., 1. *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch* (SGA 6), Springer Lect. Notes Math., **225** (1971).
- A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, 1. *Eléments de géométrie algébrique I — IV* (citât EGA), Publ. Math. IHES (1960, ...).
- R. HARTSHORNE, 1. *Algebraic geometry*, Springer Verlag, 1977.
2. *Residues and duality*, Springer, Lect. Notes Math., **20** (1966).
3. *Ample subvarieties of algebraic varieties*, Springer Lect. Notes Math. **156** (1970).
4. *Curves with high self-intersection on an algebraic surface*, Publ. Math. IHES, **36** (1969), 111—126.
- H. HIRONAKA, 1. *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of char zero*, Ann. Math., **79** (1964), 109—326.
- J. IGUSA, 1. *Betti and Picard numbers of an abstract algebraic surface*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **46** (1960), 724—726.
- V. A. ISKOVSKIĖ, 1. *Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields*, Izvestia Akad. Nauk. SSSR, **43** (1) (1979), 19—43 (l. rusă).
- V. A. ISKOVSKIĖ, YU. MANIN, 1. *Three-dimensional quartics and counter-examples to the Lüroth problem*, Mat. Sbornik, **86** (1) (1971), 140—166 (l. rusă).
- S. KLEIMAN, 1. *Toward a numerical theory of ampleness*, Ann. Math., **84** (1966), 293—344.
- F. W. KNÖLLER, 1. *2-dimensionale Singularitäten und Differentialformen*, Math. Ann. **206** (1973), 205—213.
- K. KODAIRA, 1. *On compact analytic surfaces I, II, III*, Annals Math., **71**, **77**, **78** (1960, 1963), 111—152, 563—626 și 1—40.
2. *On the structure of compact complex analytic surfaces, I, II, III, IV*, Amer. J. Math., **86**, **88** (1964, 1966), 751—798, 682—721, 55—83, și 1048—1066.
- H. KURKE, 1. *On Castelnuovo's criterion for rational surfaces*, Proc. Inter. Symp. Algebraic Geometry, Kyoto 1977, 557—563, Kinokuniya Book-Store.
- H. LAUFER, 1. *On rational singularities*, Amer. J. Math., **94** (1972), 597—608.
- J. LIPMAN, 1. *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Publ. Math. IHES, **36** (1969), 195—297.

- D. MUMFORD, 1. *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals Math. Studies, **59** (1966), Princeton.
2. *Abelian varieties*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1970.
3. *The canonical ring of an algebraic surface*, Ann. Math., **76** (1962), 612–615.
4. *Enriques' classification of surfaces in char. p: I, Global Analysis* (dedicated to K. Kodaira), 325–339, Princeton Univ. Press, 1969.
- M. NAGATA, 1. *On rational surfaces I*, Mem Coll. Sci Kyoto Univ. Ser. A, **32** (1960), 635–639.
- A. OGUS, 1. *Zariski's theorem on several linear systems*, Proc. Amer. Math. Soc., **37** (1973), 59–62.
- F. OORT, 1. *A construction of generalized Jacobian varieties by group extensions*, Math. Ann., **147** (1962), 277–286.
- C. P. RAMANUJAM, 1. *Remarks on the Kodaira vanishing theorem*, Journ. Indian Math. Soc., **36** (1972), 41–51.
- M. RAYNAUD, *Spécialisation du foncteur de Picard*, Publ. Math. IHES, **38**, 27–50.
- J. P. SERRE, 1. *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math., **61** (1955), 197–278 (citată FAC).
2. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, Ann. Inst. Fourier, **6** (1956), 1–42.
3. *Groupes algébriques et corps de classes*, Hermann, Paris 1959.
4. *Morphismes universels et variétés d'Albanese*, Séminaire Chevalley ENS 1958/59, Exposé 10.
- I. R. SAFAREVICI, 1. *Bazele Geometriei Algebrice*, Edit. Științ. Enciclopedică, București, 1976.
2. *Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes*, Tata Inst., Bombay, 1966.
- I. R. SAFAREVICI și al., 1. *Algebraic surfaces*, AMS, providence, Rhode Island, 1967.
- J. TATE, 1. *Algebraic formulas in arbitrary char.* (appendix 1 in volumul lui S. Lang, *Elliptic functions*, Addison Wesley Publ. Comp. 1973).
- O. ZARISKI, 1. *The theorem of Riemann-Roch for high multiples of a divisor on an algebraic surface*, Ann. Math., **76** (1962), 560–612.
2. *The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces*, Amer. J. Math., **80** (1958), 146–184.
3. *On Castelnuovo's criterion of rationality $p_a = p_2 = 0$ of an algebraic surface*, Illinois J. Math., **2** (1958), 303–315.
4. *The reduction of singularities of an algebraic surface*, Ann. Math., **40** (1939), 639–689.
5. *A simplified proof for the reduction of singularities of an algebraic surface*, Ann. Math., **43** (1942), 583–593.

INDEX

- Adjuncția pe o suprafață se termină (13.1)
- Ciclul fundamental (3.18), (3.20)
- Clasa canonică a unei fibrări eliptice sau cvasieliptice (7.15)
- Clasele Chern ale unei suprafețe §5
- Criteriul de contractibilitate al lui M. Artin (3.9), (3.15)
 - de contractibilitate al lui Castelnuovo (3.30)
 - Nakai-Moishezon de amplitudine (1.22)
 - Noether-Tsen de riglare (11.3), (11.10)
 - de raționalitate al lui Castelnuovo (13.3)
 - de riglare al lui Enriques (13.2)
- Curbă excepțională de prima specie (4.3)
- Curbă indecompozabilă de tip canonic (7.7)
- Desingularizare a unei singularități normale (3.16), (4.8)
 - minimală a unei singularități de dimensiune 2 (4.4)
- Diagrame Dynkin (3.32)
- Dimensiune canonică a unei suprafețe (5.6)
- Echivalența algebrică a fasciculelor inversibile §5
 - numerică a divizorilor și fasciculelor inversibile §5
- Exemplul lui Nagata (3.1)
- Existența fibrărilor eliptice sau cvasieliptice (7.11), (7.12)
 - modelelor minimale (6.2)
- Fascicul de curbe pe o suprafață (11.2)
 - dualizant (3.11)
- Fibrare de bază o curbă (7.5)
 - eliptică sau cvasieliptică (7.5), (7.6)
- Fibră excepțională (7.14)
 - multiplă (discuția dinainte de (7.14))
- Genul aritmetic al unei curbe (3.3)
- Genul geometric al unei suprafețe (5.6)
- Indice de intersecție (1.4)
- Inegalitatea Igusa-Severi §5
- Inelul canonic al unei suprafețe (5.6)
 - m -graduat (9.11)

- Lista Bagnera-DeFranchis (10.27)
- Model minimal (6.1)
- Modele minimale ale unei suprafețe raționale (12.8)
 - ale unei suprafețe riglate neraționale (12.2)
- Modul m -graduat polifinit (9.11)
- Numere Betti §5
- Plurigenuri (5.6)
- Proprietăți ale suprafețelor hipereliptice sau cvasihipereliptice (8.6), (8.10)
 - ale suprafețelor Enriques (10.11) — (10.15), (10.17)
 - ale suprafețelor K3 (10.3), (10.6)
- Punct rațional dublu (3.31)
- Scindare a unei fibrări vectoriale pe o curbă (11.17)
- Schema Picard a unei suprafețe §5
- Singularitate Gorenstein (3.13), (4.17)
 - rațională (3.17)
- Suprafață abeliană (10.19)
 - de clasă a), b), c) sau d) (8.2)
 - de tip general (9.5)
 - Enriques (10.10)
 - geometric riglată (11.13)
 - Godeaux (9.6.2)
 - hipereliptică sau cvasihipereliptică (8.8), (8.9)
 - K3 (10.3)
 - Kummer asociată unei suprafețe abeliene (10.5)
- Suprafață riglată (11.1)
- Teorema de anulare Laufer-Ramanujam (4.1)
 - de caracterizare a singularităților Gorenstein (4.17)
 - de clasificare după dimensiunea canonică (9.4), (9.8), (9.9), (13.2)
 - de dualitate a unei singularități (4.9)
 - lui Hodge de index (2.4)
 - de ireductibilitate generică a fibrelor (7.1), (7.3)
 - Riemann-Roch pentru fibrări de rang oarecare pe o curbă (11.18)
 - Zariski-Goodman (1.28)
 - Zariski-Mumford (9.10)
- Transformarea elementară a unei suprafețe geometric riglate (12.1)
 - generalizată a unei suprafețe geometric riglate de bază P^1 (12.10)
- Varietatea lui Albanese (5.2)
 - lui Picard §5
- Varietate unirațională (13.26)

LUCIAN BĂDESCU, *Suprafețe algebrice (Algebraic surfaces)*,
Editura Academiei R.S.R., București, 1981

(ABSTRACT)

The aim of this book is to present some basic facts from the theory of algebraic surfaces, e.g. rational singularities of surfaces and their relation with Grothendieck duality theory, numerical criteria for contractibility of curves on an algebraic surface (due to M. Artin), the problem of minimal models of (projective and non singular) surfaces and Enriques' classification of surfaces over an algebraically closed field of arbitrary characteristic. In fact the classification of surfaces is the main scope of this book and we intend to present the approach developed by Mumford (see Mumford [3] and [4]) and Bombieri and Mumford (see Bombieri-Mumford [1] and [2]).

Chapter one presents Kleiman's approach of defining the (cohomological) intersection theory of divisors and line bundles on a complete algebraic scheme over k and the proof of Nakai-Moishezon criterion for ampleness. As an application a theorem of Zariski is proved which asserts that every complete non singular surface is projective.

Chapter two proves the Hodge index theorem and some results concerning the semi-negativeness or negativeness of the intersection matrix of a fibre of a morphism $f: X \rightarrow Y$ in which either X is a non singular surface, Y a curve and $f_*O_X = O_Y$, or X is a non singular surface, Y a normal surface and f birational.

The third chapter presents two important criteria for contractibility due to M. Artin (theorems (3.9) and (3.15)) which will be useful later, and the theory of rational singularities of surfaces developed by the same author.

Chapter four gives further properties of rational singularities. More precisely, it studies two-dimensional singularities with the help of Grothendieck duality theory and a vanishing theorem of Laufer and Ramanujam (see theorems (4.1) and (4.9)). As an application the author characterizes completely the normal two-dimensional singularities which are Gorenstein (theorem (4.17)) and gives various characterizations of rational double points.

Chapter five reviews some fundamental facts which are needed in the classification of surfaces, such as : Noether's formula in char. p ., the Picard scheme, the Albanese variety and the canonical ring of a surface, etc.

Chapter six proves the theorem that every projective non singular surface dominates a minimal model.

Chapter seven begins with some results about the generic irreducibility and generic smoothness of fibres of a morphism from a surface to a curve (see (7.1), (7.3) and (7.4)). The indecomposable curves of canonical type on a minimal surface are then studied. These are closely related with the notion of elliptic or quasi-elliptic fibering, which plays a central role in the classification theory. One proves some results (see (7.11), (7.12) and (7.13)) which ensure the existence of such fiberings on a given minimal surface and the important theorem (7.15) which computes the canonical class of an elliptic or quasi-elliptic fibering.

Chapter eight divides minimal surfaces into four classes after their canonical dimension and proves that on a minimal surface X of canonical dimension 0 or 1 one has $p_4 \neq 0$ or $p_6 \neq 0$.

Chapter nine continues the classification after the canonical dimension, giving first information about surfaces of general type. Next a result of Zariski-Mumford is proved saying that the canonical ring of a projective non singular surface is a k -algebra of finite type.

Chapter ten deals with the minimal surfaces of canonical dimension zero. These surfaces can be divided into four classes : K3, abelian, hyperelliptic and Enriques (provided that $\text{char}(k) \neq 2, 3$). Every such class is studied separately.

Chapter eleven deals with ruled surfaces. The Noether-Tsen criterion for ruledness is proved which allows in particular to relate geometrically ruled surfaces with vector bundles over a projective non singular curve. Finally it is proved that every vector bundle of rank 2 over P^1 is a direct sum of line bundles (this is a special case of a theorem of Grothendieck).

Chapter twelve classifies completely the minimal models of ruled non rational surfaces (theorem (12.2)) and of rational surfaces (theorem of Nagata (12.8)). The methods employed here are elementary (do not depend upon the classification) and are due to Hartshorne.

The last chapter is devoted to the proof of Castelnuovo's criterion of rationality and to the proof of Enriques' theorem characterising ruled surfaces by the condition $p_{12} = 0$.

CONTENTS

<i>Terminology and notations</i>	9
§ 1. Cohomological theory of intersection and Nakai-Moishezon criterion for ampleness	11
§ 2. Hodge index theorem. The structure of the intersection matrix of a fibre . . .	26
§ 3. Criteria for contractibility and rational singularities	30
§ 4. Properties of rational singularities	59
§ 5. Noether's formula, Picard scheme, Albanese variety, Plurigenera	73
§ 6. Existence of minimal models	83
§ 7. Morphisms from a surface onto a curve. Elliptic or quasi-elliptic fiberings . . .	89
§ 8. Canonical dimension of an elliptic or quasi-elliptic fibering	113
§ 9. The classification theorem with respect to the canonical dimension	123
§10. Surfaces with canonical dimension zero (char. $\neq 2,3$)	136
§11. Ruled surfaces. Noether-Tsen criterion	164
§12. Minimal models of ruled surfaces	178
§13. The characterization of ruled and rational surfaces	189
<i>References</i>	210
<i>Index.</i>	213
<i>Abstract</i>	215

Redactor: PETRE MOCANU
Tehnoredactor: MELUȘ TUREAC

Bun de tipar 14.02.1981.

Format 16/61x86. Cost de tipar 13,75.

C.Z. pentru bibliotecă mare și mică: 513.62.



C. 766 — I. P. INFORMAȚIA
str. Brezolanu nr. 23—25,
București

60

Cartea de față reprezintă o introducere în teoria lui Enriques a clasificării suprafețelor algebrice proiective și netede.

Această importantă teorie este unanim recunoscută ca fiind dificilă, și ca urmare scopul principal al cărții este de a o face accesibilă tinerilor cercetători sau studenților din ultimii ani ai facultăților de matematică care doresc să se specializeze în geometria algebrică sau în disciplinele conexe.

Acceptându-se anumite fapte care sînt prezentate în capitolul V, cu referințele bibliografice de rigoare, demonstrațiile tuturor celorlalte rezultate sînt complete.

Cartea poate fi folosită și de o categorie mai largă de matematicieni ca sursă de informare.